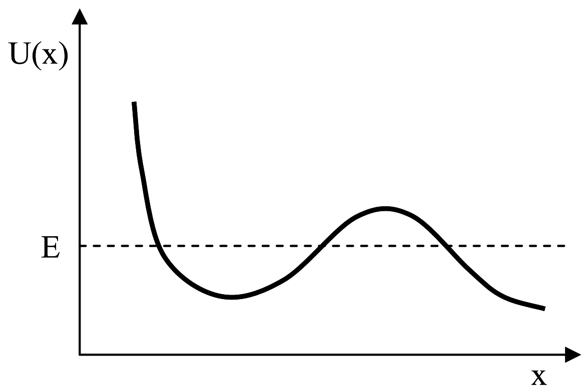
9. Differentialgleichungen

9.1 Motivation

Viele Grundgleichungen der Physik sind als Differentialgleichungen formuliert:

■ Eindimensionale Bewegung eines Teilchens (Masse m, keine Reibung) im Potenzial U(x)



klassisch: Ermittle die Bahnkurve x(t) des Massepunkts (MP) aus der auf ihn wirkenden Kraft F(x) durch Lösung der Differentialgleichung

$$F\big(x(t)\big) = m\frac{d^2x(t)}{d\,t^2} = m\,\ddot{x}(t), \quad F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

"Integration der Newton´schen Bewegungsgleichung".

quantenmechanisch: Die Wellenfunktion $\psi(x)$ genügt der stationären Schrödinger-Gleichung

$$\left[\frac{\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2}{2m} + U(x)\right]\psi(x) = E\,\psi(x)$$

Auch das ist in diesem Falle eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Wellenfunktion $\psi(x)$, E ist die Energie des quantenmechanischen Teilchens.

■ Weitere Beispiele: Maxwell´sche Gleichungen der Elektrodynamik, hydrodynamische Gleichungen usw. usf.

9.2. Grundbegriffe und ausgewählte Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen

Die explizite Form einer ODE erster Ordnung ist

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\,.$$

Gesucht wird eine Funktion y(x), die $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$ erfüllt und der Anfangsbedingung $y(x = x_0) = y_0$ genügt.

Geometrisch definiert diese Differentialgleichung in jedem Punkt der x-y-Ebene eine Richtung. Die Gesamtheit der Linienelemente (x,y,y′) bildet das sogenannte Richtungsfeld. Die gesuchte Lösungskurve muss sich in jedem Punkt (x,y) an das lokale Linienelement „anschmiegen“ und der Anfangsbedingung genügen.

Terminilogie: Hängt die unbekannte Funktion von einer (mehreren) unabhängigen Variable(n) ab, liegt eine gewöhnliche (partielle) Differentialgleichung vor (abgekürzt ODE bzw. PDE). Die Ordnung der höchsten Ableitung bestimmt den Grad einer ODE. Gehen die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen linear in die ODE oder PDE ein, ist die Differentialgleichung linear.

Einfache Beispiele:

■ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ → lineare ODE 1. Ordnung, Besonderheit: f(x,y) unabhängig von y

In diesem Fall ist y(x) einfach Fall eine Stammfunktion von f(x)

$$y(x) = \int^{x} dz\; f(z) + C\,.$$

Die freie Konstante C wird durch die Anfangsbedingung $y(x = x_0) = y_0$ festgelegt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dz\; f(z)\,.$$

■ $\frac{dy}{dx} = g(y)$ → ODE 1. Ordnung, linear nur für g(y) ~ y

Besonderheit: rechte Seite unabhängig von x

Aus $\frac{dy}{g(y)} = dx$ folgt nach Integration $\int^{y} \frac{dz}{g(z)} = x + C$ und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dz}{g(z)} = x - x_0 .$$

Die so gefundenen Funktion x = x(y) ist die Umkehrfunktion der gesuchten Lösung y = y(x) .

■ <u>Trennung der Variablen</u> (separable Differentialgleichungen)

Die letzten beiden Beispiele sind Spezialfälle der Gleichung

$\frac{dy}{dx} = h(x)\,g(y)$ $\rightarrow$ ODE 1. Ordnung, linear nur für g(y) ~ y, Besonderheit: Die rechte Seite ist ein Produkt aus zwei Faktoren, die jeweils nur von x und y abhängen.

Diese Gleichung kann durch "Trennung der Variablen" gelöst werden:

$\frac{dy}{g(y)} = h(x)\,dx$, nach Integration $\int^{y} \frac{dz}{g(z)} = H(x) + C$ und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy'}{g(y')} = H(x) - H(x_0) , \quad \text{AB:} \quad y(x = x_0) = y_0 .$$

Dabei ist H(x) die Stammfunktion von h(x), also $\frac{dH}{dx} = h(x)$.

9.3 Lineare ODE der Ordnung n

Die allgemeine Form der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = f(x)$$

oder unter Verwendung des linearen Operators $L_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ kürzer

$L_n\, y(x) = f(x)$.

Die von y und seinen Ableitungen nach x unabhängige Funktion f(x) auf der rechten Seite heißt Inhomogenität der ODE. Drei (hier nicht bewiesenen) Sätze sind für die Lösung linearer ODE n-ter Ordnung wichtig:

1) Die homogene Gleichung $L_n\, y(x) = 0$ besitzt genau n linear unabhängige Lösungen $y_1(x)$, … , $y_n(x)$.

2) Die allgemeine Lösung der linearen homogenen Gleichung $L_n\, y(x) = 0$ lautet

$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x)$ ("Superpositionsprinzip").

Sie enthält <u>n freie Konstanten</u> C_i , die aus den Anfangsbedingungen

$y(x_0)$, $y'(x_0)$, … , $y^{(n-1)}(x_0)$ bestimmt werden.

3) Die allgemeine Lösung der inhomogenen ODE $L_n\, y(x) = f(x)$ ist die Summe aus einer speziellen Lösung $y_0(x)$ der inhomogenen und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$y(x) = y_0(x) + c_1\, y_1(x) + \ldots + c_n\, y_n(x)$, wobei $L_n\, y_0(x) = f(x)$.

■ Beispiel: $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

Das ist eine lineare, homogene ODE zweiter Ordnung, $L_2 = x^2 \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2$. Besonderheit: In jedem Term ist die Anzahl der x-Potenzen gleich der Ordnung der Ableitung. Deshalb erscheint der Ansatz $y \sim x^\lambda$ aussichtsreich. Eingesetzt in die Gleichung folgt

$$x^\lambda \left[\lambda(\lambda - 1) - 2\lambda + 2 \right] = 0 \ , \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2 .$$

Die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$, wie die Probe (Einsetzen) bestätigt.

■ Beispiel: **Lineare ODE erster Ordnung**

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\ y + q(x) \tag{1}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1) ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\ y \tag{2}$$

und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (1).
Bestimmen wir zunächst die allgemeine Lösung $y_a(x)$ der homogenen Gleichung (2). Über Trennung der Variablen $\frac{dy_a}{y_a} = p(x)\ dx$ folgt nach Integration $\ln y_a = \ln C + \int^x dz\ p(z)$

und daraus

$$y_a(x) = C \exp\left(\int^x dz\ p(z) \right). \tag{3}$$

Das ist die allgemeine Lösung von (2), denn sie enthält <u>eine</u> freie Konstante C, wie für eine Gleichung <u>erster</u> Ordnung gefordert. C ergibt sich aus der Anfangsbedingung, d.h.

$$y_a(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x p(z)\ dz \right), \quad y(x = x_0) = y_0 . \tag{4}$$

Die Berechnung einer speziellen Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen Gleichung (1) gelingt im vorliegenden Fall durch "Variation der Konstanten C". Dahinter verbirgt sich der Lösungsansatz

$$y_s(x) = C(x)\,\exp\left(\int_{x_0}^{x} dz\; p(z)\right) , \tag{5}$$

bei dem C als Funktion von x aufgefasst wird.
Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Stammfunktionen P(x) von p(x)

$$P(x) := \int_{x_0}^{x} dz\; p(z)\,, \quad \frac{dP(x)}{dx} = p(x)\ , \quad P(x_0) = 0$$

ein. Dann ist $y_s(x) = C(x)e^{P(x)}$ und eingesetzt in (1) folgt

$$\frac{dy_s(x)}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{P(x)} + \underline{C(x)p(x)e^{P(x)}} = \underline{p(x)C(x)e^{P(x)}} + q(x) \quad \text{also} \quad \frac{dC(x)}{dx} = q(x)\; e^{-P(x)} .$$

Die letzte Gleichung für C(x) ist unmittelbar integrierbar $C(x) = \int^{x} dz\; q(z)\; e^{-P(z)}$.

Also ist mit (5)

$$y_s(x) = C(x)e^{P(x)} = \int^{x} dz\; q(z)\; e^{-P(z)} \cdot e^{P(x)} \tag{6}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (1).

Die allgemeine Lösung von (1) ist nun gemäß Satz 3) mit (3) und (6)

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) = C\,e^{P(x)} + \int^{x} dz\; q(z)\;\; e^{P(x)-P(z)} = y_0\, e^{P(x)} + \int_{x_0}^{x} dz\; q(z)\;\; e^{P(x)-P(z)} ,$$

wobei im letzten Schritt die Anfangsbedingung $y(x = x_0) = y_0$ verwendet wurde.

■ Beispiel: **Lineare homogene ODE n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Gleichungen des Typs

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1\,y'(x)+a_0\,y(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\,\frac{d^k y}{dx^k}=0 \qquad (7)$$

mit konstanten Koeffizienten a_k werden mit Hilfe des Exponentialansatzes $y(x)\sim e^{\lambda x}$ gelöst. Eingesetzt in (7) ergibt sich für λ die Bestimmungsgleichung

$$\lambda^n+a_{n-1}\,\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\,\lambda+a_0=0\,.$$

Dieses sogenannte charakteristische Polynom besitzt n (möglicherweise komplexe) Lösungen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Die allgemeine Lösung ist gemäß Satz 2) eine Überlagerung der n linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda_i x}$

$$y(x)=c_1\,e^{\lambda_1 x}+c_2\,e^{\lambda_2 x}+\ldots+c_n\,e^{\lambda_n x}\,.$$

Die n freien Konstanten $c_1,\ldots,c_n$ werden an die Anfangsbedingungen angepasst.

■ Beispiel: Gedämpfte (1D) eindimensionale Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage

$$m\,\ddot{x}=-k\,x-\gamma\,\dot{x}\;\;\text{bzw.}\;\;\ddot{x}+2\delta\,\dot{x}+\omega^2 x=0,\;\;\frac{\gamma}{m}=2\delta$$

Exponentialansatz: $x(t)=e^{\lambda t}$.

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2+2\delta\lambda+\omega^2=0\,,\;\;\lambda_{1/2}=-\,\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega^2}$

Allgemeine Lösung: $x(t)=c_1\,e^{\lambda_1 t}+c_2\,e^{\lambda_2 t}$.

Fallunterscheidung:

(i) $\delta < \omega$ zwei komplex konjugierte Wurzeln

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{A}_{ae^{i\varphi}} \exp(-\delta t + i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\, t \right\} = a\, e^{-\delta t} \cos(\omega_* t + \varphi)\ ,\ \ \omega_* := \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

$\rightarrow$ gedämpfte Schwingung

(ii) $\delta > \omega$ zwei reelle Wurzeln

$$x(t) = c_1\, e^{-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right) t} + c_2\, e^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\right) t}$$

$\rightarrow$ aperiodische asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage $x = 0,\ \dot{x} = 0$

(iii) $\delta = \omega$ Doppelwurzel

$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\delta t}$ $\quad\rightarrow$ aperiodischer Grenzfall.

9.4 Gekoppelte lineare homogene ODE mit konstanten Koeffizienten

Auch bei Systemen aus N gekoppelten linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten, der Einfachheit halber reellen Koeffizienten a_{ik} zur Bestimmung von N unbekannten Funktionen $y_n(x)$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} y_k\ ,\ \ i = 1, \ldots, N$$

wird der Exponentialansatz $y_i(x) = C_i e^{\lambda x}$ verwendet. Er führt auf ein System aus N homogenen, linearen, algebraischen Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{N}(\lambda\,\delta_{ik} - a_{ik})\,C_k = 0\,,\quad i = 1,\ldots,N$$

für N unbekannte Konstante $C_1, \ldots, C_N$. Eine nichttriviale Lösung (nicht alle $C_k = 0$) existiert genau dann, wenn die Determinante

$$\mathrm{Det}(\lambda\,\delta_{ik} - a_{ik}) = 0$$

verschwindet. Diese Bedingung führt wieder auf ein Polynom n-ten Grades in λ (charakteristische Gleichung), das genau N Lösungen λ_μ besitzt, die Eigenwerte der Matrix $\underline{\underline{A}} = \{a_{ik}\}$. Sind alle λ_μ verschieden (keine Entartung), ergeben sich die gesuchten Lösungen als Überlagerung der $e^{\lambda_\mu x}$

$$y_i(x) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu\, C_i^\mu\, e^{\lambda_\mu x}\,.$$

Die C_k^μ (k = 1, …, N) sind die Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ zum Eigenwert λ_μ, also die Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{N}(\lambda_\mu\,\delta_{ik} - a_{ik})\,C_k^\mu = 0\,.$$

Bemerkung: 1) Kommen einzelne Eigenwerte mehrfach vor (entartete Eigenwerte), kann es weniger als N Eigenvektoren geben. In diesem Fall lassen sich weitere Lösungen durch Variation der Konstanten finden (Beispiel: aperiodischer Grenzfall bei gedämpften Schwingungen). Falls die reelle Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch ist, kann das nicht passieren: Dann gibt es trotz Entartung stets genau N Eigenvektoren.
2) Beachte: Eine homogene lineare ODE n-ter Ordnung ist äquivalent zu einem System aus n gekoppelten linearen ODE 1. Ordnung.