Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau

# 1. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

**Abgabe: Mi. 04.05.2016 in der Übung**

*Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.*

**Aufgabe 1 (10 Punkte):** *Maxwell-Bloch-Gleichungen*

Die Maxwell-Bloch-Gleichungen sind (dimensionslose) Ratengleichungen und beschreiben die Dynamik eines Lasers

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \kappa(P - E),\\ \dot{P} &= \gamma_1(E\,D - P),\\ \dot{D} &= \gamma_2(J + 1 - D - E\,P).\end{aligned}$$

Hierbei ist $E$ das elektrische Feld der Lasermode, $P$ die mittlere Polarisation im Medium und $D$ die Besetzungsinversion. Der Parameter $\kappa > 0$ ist die Photon-Verlustrate und $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$ sind die Zerfallsraten der Polarisation bzw. der Inversion. Der Parameter $J$ stellt die Pumprate abzüglich des Schwellwerts dar und kann positiv, null oder negativ sein.
Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lorenz-Gleichungen und zeigen daher kompliziertes dynamisches Verhalten und insbesondere auch Chaos.

1. Finden Sie die Fixpunkte der Gleichungen.
2. Charakterisieren Sie den Fixpunkt der "Aus"-Lösung (bei der das E-Feld verschwindet) bezüglich seiner Stabilität und Art (Sattel/Knoten/Fokus).
3. Für viele Laser gibt es eine Zeitskalentrennung $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$. Damit lassen sich dann $P$ und $D$ adiabatisch wie folgt eliminieren. Nehmen Sie $\dot{P} \approx 0$ und $\dot{D} \approx 0$ an. Leiten Sie damit eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung für $E$ her.
4. Finden Sie für die vereinfachte eindimensionale Gleichung die Fixpunkte $E^*$ und deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm mit $E^*$ in Abhängigkeit von $J$.

**Bitte Rückseite beachten!**⟶

**Aufgabe 2 (10 Punkte):** *Van-der-Pol-Oszillator*
Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (\kappa \geq 0).$$

Wenn $a > 0$ ist, verhält sich dieser für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung mit $y = \dot{x}$ und finden Sie die Fixpunkte sowie deren Stabilität.

2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für $\kappa = 1$, $\omega_0 = 1$ und $1000$ verschiedenen $a$ Werten aus $[-1, 1]$. Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. $100$ Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von $x$ über den $a$ Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.
   Plotten Sie außerdem das Phasen-Portrait in der $(x, y)$-Ebene für $a = 0.1$, $a = 1$, und $a = 2$. Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn $a$ verändert wird.

| | |
|---|---|
| `Vorlesung:` | • Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.<br>• Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203. |
| `Übung:` | • Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731. |
| `Webseiten:` | • Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16` |
| `Scheinkriterien:` | • Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).<br>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung. |
| `Kontakte:` | • Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung.<br>• Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, `schoell@physik.tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung.<br>• Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, `lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, Sprechzeiten Di. 14:00-15:00 |