Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau, Andreas Koher

10. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 06.07.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 19 (20 Punkte): *Class-A-Laser mit optischer Injektion*

Ein optisch injizierter (Class-A) Laser ist ein Spezialfall eines getriebenen Oszillators. In Amplituden-Phasen-Darstellung, $E = Ae^{i\varphi}$, ist dieser gegeben durch:

$$\dot{A}(t) = \big(J - A(t)^2\big)A(t) + K\cos(\varphi(t)) \tag{1}$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\Delta\omega - \frac{K}{A(t)}\sin(\varphi(t)) \tag{2}$$

Hier bezeichnet $\varphi(t) := \varphi_S - \varphi_M$ den Phasenunterschied zwischen dem getriebenen (Slave-) Laser und dem injizierenden (Master-) Laser. Die beiden Laser müssen nicht bei der gleichen optischen Frequenz emittieren. Diesen Frequenzunterschied bezeichnen wir mit $\Delta\omega$.
Wenn $\Delta\omega$ hinreichend klein und die Injektionsstärke K hinreichend groß sind, erwarten wir eine Synchronisation des Slave-Lasers mit dem Master. Hier soll der Parameterbereich gefunden werden, für die die Synchronisation stabil ist, sowie die begrenzenden Bifurkationen bestimmt werden. Nehmen Sie im Folgenden o.B.d.A. $J=1$ an. Die Schwelle liegt bei $J=0$ ($J \equiv P-1$, vgl. VL).

1. Vernachlässigen Sie zunächst die Dynamik der elektrischen Feldamplitude und nehmen Sie $A(t) = A^*$ an. Dabei bezeichne A^* den Wert am Fixpunkt für $K = 0$. Bestimmen Sie den Parameterbereich, in dem der Laser synchronisiert ist (d.h. $\dot{\varphi} = 0$), sowie die Stabilität der Lösungen.

2. Betrachten Sie nun das volle System. Bestimmen Sie zunächst Ausdrücke für $\sin\varphi^*$ und $\cos\varphi^*$ aus der Fixpunktbedingung. Schreiben Sie damit die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte des Systems am Fixpunkt auf.

   Hinweis: Berechnen Sie A^* noch nicht explizit, sondern schreiben Sie die charakteristische Gleichung in Abhängigkeit von A^* auf. Die resultierende Gleichung sollte von φ^* nicht mehr abhängen.

3. Schreiben Sie die Eigenwertgleichung in der Form

   $$\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

   Welche Bedingungen müssen B bzw. C erfüllen:

   - An einer Sattel-Knoten-Bifurkation?
   - An einer Hopf-Bifurkation?

   Bestimmen Sie aus diesen Bedingungen die Werte von A^* an der jeweiligen Bifurkation.

4. Verwenden Sie die in Punkt 2 bestimmten Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen, um eine implizite Bestimmungsgleichung für $\Delta\omega$ in Abhängigkeit von A^* und K zu finden. Diese soll nicht von φ^* abhängen. (Eliminieren Sie also $\sin\varphi^*$ und $\cos\varphi^*$.)

Bitte Rückseite beachten!⟶

5. Nun können Sie Ausdrücke für die Hopf- und Sattel-Knoten-Bifurkation bestimmen. Setzen Sie dazu die Werte für A^* aus Punkt 3 in die Bestimmungsgleichung aus Punkt 4 ein. Sie erhalten dann Ausdrücke für $\Delta\omega$ in Abhängigkeit von K (oder andersherum), also Bifurkationslinien in der $(K, \Delta\omega)$-Ebene.

   Bestimmen Sie die Bifurkationslinien für die Hopfbifurkation analytisch.

6. Bestimmen Sie die Bifurkationslinien für die Sattel-Knoten-Bifurkation numerisch. Plotten Sie nun alle Bifurkationen in einem Bifurkationsdiagramm in der $(K, \Delta\omega)$-Ebene.

   Hinweis: Es existieren mehrere Lösungen der Bestimmungsgleichungen. Plotten Sie alle.

7. Markieren Sie die Bereiche im Bifurkationsdiagramm, in denen der Laser stabil ist. Dazu können Sie z.B. das System numerisch simulieren oder die Eigenwerte der Lösungen bestimmen.

`Vorlesung:`	• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**. • Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 202**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, `schoell@physik.tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, `lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30 • Andreas Koher, ER 240, 314-29052, `andreas.koher@campus.tu-berlin.de`, Sprechzeiten Di. 13-14