

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau

3. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 18.05.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Maxwell-Bloch-Gleichungen und Lorenz-System

Die in den ersten beiden Übungsblättern vorgestellten Maxwell-Bloch-Gleichungen (1) und das Lorenzsystem (2) lassen sich ineinander überführen. Die Gleichungssysteme lauten:

$$\dot{E} = \kappa(P - E), \quad (1a) \quad x' = -\sigma x + \sigma y \quad (2a)$$

$$\dot{P} = \gamma_1(E D - P), \quad (1b) \quad y' = \rho x - y - xz \quad (2b)$$

$$\dot{D} = \gamma_2(J + 1 - D - EP). \quad (1c) \quad z' = xy - \beta z, \quad (2c)$$

1. Transformieren Sie die Maxwell-Bloch-Gleichungen in die Lorenz-Gleichungen. Führen sie dazu neue Variablen ein:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &:= aE & \tilde{P} &:= bP \\ \tilde{D} &:= c(D + d) & s &:= \frac{t}{t_c} \end{aligned}$$

Hier beschreibt s eine reskalierten Zeit. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a, b, c, d, t_c \in \mathbb{R}$, sowie σ, ρ und β so, dass sie die Gleichungen (2) erhalten. Identifizieren Sie dazu die neuen Größen $\tilde{E}, \tilde{P}, \tilde{D}$ mit x, y, z .

2. In Experimenten beobachtet man bei manchen Lasern eine sogenannte zweite Laserschwelle. Ab einer bestimmten Pumpstärke fängt der Laser dabei selbständig an zu oszillieren. Finden Sie die zweite Laserschwelle ρ_{2th} , indem Sie die Lorenzgleichungen auf Hopf-Bifurkationen hin untersuchen.

Stellen Sie dazu die Eigenwertgleichung der Jacobimatrix im lasenden Fixpunkt auf. Machen Sie dann den Ansatz

$$\lambda = \pm i\omega \quad (3)$$

und lösen Sie die charakteristische Gleichung nach ρ auf.

Hinweis: In den Lorenzgleichungen übernimmt ρ die Rolle der Pumpstärke. Gleichung (3) ist die notwendige Bedingung für eine Hopf-Bifurkation.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Floquet-Theorie

Betrachten Sie das folgende System in Polarkoordinaten:

$$\dot{r} = r(1 - r)(b + r \cos \phi) \quad (4a)$$

$$\dot{\phi} = \omega \quad (4b)$$

Es seien $r, \phi \in \mathbb{R}$, und $\omega > 0$ sowie $b \in \mathbb{R}$ seien freie Parameter.

Bitte Rückseite beachten! →

3. Übung TPVI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle, SS 16

1. Berechnen Sie die Fixpunkte des Systems und deren Stabilität.
2. Zeigen Sie, dass das System einen periodischen Orbit besitzt. Berechnen Sie die dazugehörige Lösung $r(t), \phi(t)$ sowie die Periode T analytisch.
3. Berechnen Sie die Stabilität des periodischen Orbits in Abhängigkeit vom Parameter b . Gehen Sie wie folgt vor:
 - Betrachten Sie kleine Abweichungen $\underline{\delta x} = (\delta r, \delta \phi)^T$ von der periodischen Lösung und stellen Sie deren dynamische Gleichungen auf, indem Sie das System um die periodische Lösung linearisieren.
 - Lösen Sie die linearisierte Gleichung und berechnen Sie $\underline{\delta x}(t)$.
 - Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator einer Periode $\underline{U}(T)$, dieser ist wie folgt definiert:

$$\underline{\delta x}(t + T) = \underline{U}(T)\underline{\delta x}(t)$$

- Die Eigenwerte von $\underline{U}(T)$ (dies sind die Floquet-Multiplikatoren μ_j) bestimmen die Stabilität des periodischen Orbits. Berechnen Sie diese sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.• Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.
Übung:	<ul style="list-style-type: none">• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none">• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, kathy.luedge@tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung.• Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, schoell@physik.tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung.• Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, lingnau@mailbox.tu-berlin.de, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30