Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau

5. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 01.06.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen*

In dieser Aufgabe soll die folgende Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \quad \lambda\, x + \omega\, y - K\,[x(t) - x(t-\tau)],\\ \dot{y} &= -\omega\, x + \lambda\, y - K\,[y(t) - y(t-\tau)],\end{aligned}$$

numerisch gelöst werden.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass $K \geq \lambda/2$ eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.
2. Integrieren Sie das System mit $\lambda = 0.5$ und $\omega = \pi$ numerisch und plotten Sie die Trajektorien für $K = 0$, $K = 0.2$, $K = 0.25$ und $K = 0.3$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

  $$\dot{X} = f[X(t),\, X(t-\tau)]$$

  ist gegeben durch

  $$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n,\, X_{n-\Delta}],$$

  wobei $\Delta = \tau/dt$.

- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind, fangen Sie von vorne an).
  Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation %.

- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.

- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits (inklusive der Transiente).

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Logistisches Populationsmodell mit Delay*
Betrachten Sie das folgende Modell für die Anzahl N an Individuen in einer Population

$$\dot{N}(t) = rN(t)[1 - N(t-\tau)/K],$$

wobei r die Wachstumsrate und K ein Maß für die Tragfähigkeit der Umwelt ist. Das Modell kann auf die dimensionslose Gleichung

$$x'(s) = x(s)[1 - x(s-a)]$$

überführt werden. Betrachten Sie im Folgenden nur noch die dimensionslose Gleichung.

1. Die Fixpunkte liegen offensichtlich bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$. Zeigen Sie, dass x_0 stets instabil ist und x_1 für $a = 0$ stabil ist.

2. Finden Sie den Wert $a > 0$, bei dem x_1 die Stabilität in einer Hopf-Bifurkation verliert.

`Vorlesung:`	• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**. • Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 202**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, `schoell@physik.tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, `lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30