Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 27. Mai 2016
http://www.itp.tu-berlin.de/?ndk16

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau

6. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 08.06.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Halbleiterlaser mit optischer Rückkopplung*

Halbleiterlaser mit optischer Rückkopplung, beispielsweise durch einen halbdurchlässigen Spiegel vor der Laserkavität, lassen sich durch die sogenannten Lang-Kobayashi-Gleichungen beschreiben:

$$\dot{E} = (1 + i\alpha)NE + KE(t - \tau) \tag{1a}$$

$$T\dot{N} = J - N - (N + 1)|E|^2 \tag{1b}$$

Dabei ist E die komplexe elektrische Feldamplitude in der Laserkavität und N die normierte Ladungsträgerinversion. T bezeichnet die Zeitskalentrennung zwischen Licht und Ladungsträgern, J ist die normierte Pumpstärke. Durch die endliche Laufzeit wird das Licht mit einer Zeitverzögerung τ in die Laserkavität zurückgekoppelt, dabei bezeichnet K die Rückkopplungsstärke. Der Parameter α (Amplituden-Phasen-Kopplung) führt zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte.

1. Bestimmen Sie im Fall ohne Rückkopplung ($K = 0$) die Fixpunkte des Systems und deren Stabilität.

2. Durch die Rückkopplung werden für zunehmendes K neue Lösungen geboren. Wir interessieren uns für die sogenannten externen Kavitätsmoden (ECMs), gegeben durch

   $$E = Ae^{i\Delta\omega t} \qquad\qquad N = N^* = \text{const.} \tag{2}$$

   mit $A, \Delta\omega \in \mathbb{R}, A = \text{const.}$. Die ECMs besitzen eine um $\Delta\omega$ verschobene Laserfrequenz. Leiten Sie mit obigem Ansatz die folgende Bestimmungsgleichung für die ECMs her:

   $$\Delta\omega = -K\sqrt{1 + \alpha^2}\sin(\Delta\omega\tau + \arctan\alpha) \tag{3}$$

   Hinweis: $a\sin(x) + b\cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\left(x + \arctan\frac{b}{a}\right)$.

3. Wir wählen nun $\alpha = 0$, $\tau = 15$.

   Gleichung (3) ist eine transzendente, analytisch nicht lösbare Gleichung. Suchen Sie für verschiedene $K \in [0, 1]$ graphisch die Werte von $\delta\omega$, die Gl. (3) lösen. Skizzieren Sie dann die Lösungen zu Gl. (3) in einem $(K, \delta\omega)$-Diagramm.

   Bonus: Sie können alternativ auch ein Programm schreiben, das Gl. (3) numerisch löst. Stellen Sie dann sicher, dass sie alle Lösungen finden!

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Gekoppelte Hopf-Normalformen*
Betrachten Sie im Folgenden subkritische Hopf-Normalformen (ohne Amplituden-Phasen-Kopplung: $\gamma = 0$, vgl. VL):

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + |z|^2)z \tag{4}$$

mit $z \in \mathbb{C}$, $\omega > 0$.

1. Bestimmen Sie Fixpunkte und periodische Orbits des Systems in Abhängigkeit von λ sowie deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm.

2. Wir betrachten zwei diffusiv gekoppelte Hopf-Normalformen mit der Kopplungsstärke a:

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + |z_1|^2)z_1 + a(z_2 - z_1) \tag{5a}$$
$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + |z_2|^2)z_2 + a(z_1 - z_2) \tag{5b}$$

   Drücken Sie Gleichung (5) in Abhängigkeit von den neuen Koordinaten

$$z_+ := \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \qquad\qquad z_- := \tfrac{1}{2}(z_1 - z_2) \tag{6}$$

   aus.

3. Wir interessieren uns nun für die synchronen ($z_- = 0$) und antisynchronen Lösungsmengen ($z_+ = 0$) des Systems. Zeigen Sie, dass in diesen beiden Fällen die Differentialgleichungen für $z_\pm$ jeweils wieder die Form einer subkritischen Hopf-Normalform annehmen. Bei welchen Werten von λ bifurkieren die zwei Lösungsmengen? Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm des Gesamtsystems bezüglich λ.

`Vorlesung:`	• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**. • Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 202**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, `schoell@physik.tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, `lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30