

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau, Andreas Koher

7. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 15.06.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 13 (12 Punkte): Master Stability Function

Betrachten Sie N identische eindimensionale Maps, die in einem Netzwerk gekoppelt sind:

$$x_{k+1}^i = f(x_k^i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} h(x_k^j). \quad (1)$$

Hierbei ist f die lokale Dynamik von jedem einzelnen Element, σ ist die Kopplungsstärke, G_{ij} ist die Kopplungsmatrix, die angibt, wie stark der Link $j \rightarrow i$ ist, und h ist eine Funktion, die die Kopplung der Elemente beschreibt.

Die *master stability function* (MSF) ist eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und bildet eine komplexe Zahl $\alpha + i\beta$ ab auf den (größten) Lyapunov-Exponenten Λ_{\max} , der aus der Variationsgleichung

$$\xi_{k+1} = [f'(x_k^s) + (\alpha + i\beta)h'(x_k^s)] \xi_k$$

hervorgeht, wobei x_k^s die synchronisierte Dynamik ist. D.h.:

$$\Lambda_{\max} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{|\xi_k|}{|\xi_0|} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \ln [f'(x_j^s) + (\alpha + i\beta)h'(x_j^s)].$$

1. Erklären Sie, warum die Zeilensumme $\sum_{j=1}^N G_{ij}$ für alle i gleich sein muss, damit es eine synchronisierte Lösung von Gl. (1) geben kann. Im Folgenden nehmen wir eine verschwindende Zeilensumme an:

$$\sum_{j=1}^N G_{ij} = 0$$

Wie lautet in diesem Fall die Gleichung für die synchronisierte Dynamik?

2. Betrachten Sie nun die gekoppelte logistische Map mit

$$f(x) := r x(1 - x), \quad h(x) := x.$$

Wählen Sie einen r -Wert im nicht-chaotischen und einen im chaotischen Bereich und berechnen und plotten Sie jeweils die MSF als Funktion von α und β (für geeignete Bereiche). Zeichnen Sie insbesondere die $\Lambda_{\max} = 0$ Höhenlinie ein.

Hinweis: Gehen Sie von Ihrer Lösung von Zettel 4 Aufgabe 8 aus und wandeln Sie den Code entsprechend ab, um die Lyapunov-Exponenten auszurechnen. Für den Plot können Sie z.B. die `matplotlib`-Funktionen `contour` und `contourf` verwenden.

3. Geben Sie für die beiden r -Werte jeweils zwei Beispiele für Netzwerke mit mindestens drei Elementen an (Zeilensumme 0), für die die Synchronisation stabil bzw. instabil ist. Tragen Sie dazu die Eigenwerte $\sigma\gamma_k$ der Matrix σG in den entsprechenden Plot der MSF ein.

Bitte Rückseite beachten! →

7. Übung TPVI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle, SS 16

4. Simulieren Sie die vier Beispiele direkt und überprüfen Sie so Ihr Ergebnis bezüglich der Stabilität der Synchronisation.

Hinweis: Wählen Sie leicht unterschiedliche Anfangsbedingungen für die einzelnen Knoten.

Aufgabe 14 (8 Punkte): Eigenwerte von Kopplungsmatrizen

Berechnen Sie die Eigenwerte der Kopplungsmatrizen für Systeme mit N Einheiten, die in folgender Art gekoppelt sind:

1. *unidirektionaler Ring*
Die Elemente sind unidirektional (in eine Richtung) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
2. *bidirektionaler Ring*
Die Elemente sind bidirektional (in beide Richtungen) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
3. *all-to-all coupling*
Jedes Element ist mit jedem Anderen verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
4. *star coupling*
Ein ausgezeichnetes Element i_0 ist bidirektional mit allen anderen verbunden. Alle ausgehenden und eingehenden Kopplungen von i_0 sind jeweils gleich. Das Verhältnis von beiden ist so gewählt, dass die Zeilensumme konstant ist.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203.• Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 202.
Übung:	<ul style="list-style-type: none">• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none">• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, kathy.luedge@tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung.• Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, schoell@physik.tu-berlin.de, Sprechzeiten nach Vereinbarung.• Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, lingnau@mailbox.tu-berlin.de, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30