Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Übung: Dr. Benjamin Lingnau, Andreas Koher

8. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 22.06.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 15 (12 Punkte): *Kohärenzresonanz im Neuronenmodell*

Betrachten Sie das sogenannte Leaky-Integrate-and-Fire-Modell, das das Verhalten von Neuronen in simpler Weise beschreibt:

$$\dot{u}(t) = I - u(t) + D\xi(t) \tag{1}$$

$$\text{Falls } u(t) \geq 1, \text{ setze } u(t) \to 0. \tag{2}$$

mit $I \in \mathbb{R}$ und einem Gaußschen weißen Rauschen $\xi(t)$ mit der Rauschstärke D. Das sogenannte Membranpotential $u(t)$ läuft im Fall ohne Rauschen offensichtlich in den stabilen Fixpunkt $u^* = I$. Überschreitet $u(t)$ den Schwellwert von 1, "feuert"das Neuron. Dabei sinkt das Membranpotential schlagartig ab (hier auf 0). Im Fall $I > 1$ feuert das Neuron periodisch, für $I < 1$ ist es anregbar.

1. Berechnen Sie für $I > 1$ und $D = 0$ das sogenannte Interspike-Intervall T_{ISI}, also die Zeit die nach einem Feuern jeweils bis zum nächsten vergeht.

2. Simulieren Sie das Neuron für den Fall $D > 0$ numerisch für

   (a) $I = 1.1$, also im periodischen Fall,

   (b) $I = 0.9$, also im anregbaren Fall.

   Berechnen Sie in beiden Fällen die normierte Standardabweichung der Interspike-Intervalle,

   $$R_T := \frac{\sqrt{\langle \Delta T_{ISI}^2 \rangle}}{\langle T_{ISI} \rangle} = \frac{\sqrt{\langle {T_{ISI}}^2 \rangle - \langle T_{ISI} \rangle^2}}{\langle T_{ISI} \rangle}. \tag{3}$$

   Für $R_T = 0$ würde das Neuron in perfekt regelmäßigen Zeitabständen feuern, $R_T > 0$ bedeutet irreguläres Feuern.

   Plotten Sie R_T sowie die Korrelationszeit t_{cor} (siehe Vorlesung) in Abhängigkeit von D. Wählen Sie dazu D in gleichmäßigen Abständen aus dem Intervall $(0, 1]$. In welchen der beiden Fälle tritt Kohärenzresonanz auf?

Hinweis: Integrieren Sie das System ausreichend lange (mehrere Tausend Spikes), um statistische Schwankungen von R_T zu unterdrücken. Im anregbaren Fall kann es aber auch sein, dass die Rauschstärke nicht stark genug ist, um das Neuron zum Feuern zu bringen. In dem Fall müssen Sie die Integration ab einem bestimmten Punkt abbrechen.

Ein numerischer Zeitschritt von $dt = 0.05$ sollte gut funktionieren.

In Python können Sie den Befehl `numpy.correlate(x,x,"full")` zur Berechnung der Autokorrelation der Zeitserie `x` verwenden.

Aufgabe 16 (8 Punkte): *Linienbreite des Lasers*

Betrachten Sie folgendes Modell eines (Class-A) Lasers:

$$\dot{A}(t) = \big(J - A(t)^2\big)A(t) + D\xi^{(1)}(t) \tag{4}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha\big(J - A(t)^2\big) + \frac{D}{\sqrt{J}}\xi^{(2)}(t) \tag{5}$$

Hier beschreibt $E = A\exp(i\varphi)$ das E-Feld in Polardarstellung. Für $J > 0$ besitzt das System bei $A^* = \sqrt{J}$ (und φ^* beliebig) einen Fixpunkt. D ist die Rauschstärke der spontanen Emission und α ist der sog. linienverbreiternde Faktor. $\xi^{(i)}$ sind δ-korrelierte Gaußsche weiße Rauschterme: $\langle \xi^{(i)}(t)\xi^{(j)}(t')\rangle = \delta(t-t')\delta_{i,j}$.

1. Linearisieren Sie das System um den Fixpunkt, $\underline{X}(t) = \underline{X}^* + \underline{\delta X}(t)$, schreiben Sie also

$$d\underline{\delta X}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\delta X}(t)dt + \underline{\underline{B}} \cdot d\underline{W} \tag{6}$$

   (vgl. Vorlesung). Bestimmen Sie $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$.

2. Berechnen Sie mit Hilfe der Varianzmatrix,

$$\underline{\underline{\sigma}} := \int_0^t \exp[\underline{\underline{A}}(t-t')]\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^T \exp[\underline{\underline{A}}^T(t-t')]\mathrm{d}t', \tag{7}$$

   die Varianz der Laserphase, $\langle\phi^2\rangle = \sigma_{\varphi\varphi}$. Sie entspricht also dem zu φ gehörenden Eintrag von $\underline{\underline{\sigma}}$.

3. Bestimmen Sie die Linienbreite des Lasers. Diese ist gegeben durch

$$\Delta\nu = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\langle\phi^2\rangle. \tag{8}$$

Hinweis: Sie können $\exp(\underline{\underline{A}})$ in MATHEMATICA mit dem Befehl `MatrixExp[...]` berechnen. Die analytische Berechnung gibt Bonuspunkte!

`Vorlesung:`	• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**. • Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 202**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, `schoell@physik.tu-berlin.de`, Sprechzeiten nach Vereinbarung. • Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, `lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30