

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge, Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD  
Übung: Dr. Benjamin Lingnau, Andreas Koher

## 9. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

### Abgabe: Mi. 29.06.2016 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

### Aufgabe 17 (10 Punkte): Einschaltverhalten eines Class-B Lasers

Betrachten Sie folgende Lasergleichungen für die (normierte) elektrische Feldintensität  $I \equiv |E^2|$  sowie die Ladungsträgerinversion  $N$  (vgl. Vorlesung:  $N \equiv D - 1$ ):

$$\dot{I}(t) = I(t)N(t) \quad (1)$$

$$\dot{N}(t) = \frac{1}{T} \left( J - N(t) - (N(t) + 1)I(t) \right) \quad (2)$$

1. Simulieren Sie den Einschaltvorgang des Lasers numerisch. Wählen Sie dazu  $T = 300$ ,  $J = 2$  mit den Anfangsbedingungen  $I(0) = 0.01$ ,  $N(0) = -1$ . Sie beobachten gedämpfte Schwingungen, die sogenannten Relaxationsoszillationen, bevor das System nach einigen hundert Zeiteinheiten in den Fixpunkt läuft.
2. Wir wollen den Grenzfall großer  $T$  (also langsame Ladungsträgerdynamik) betrachten. Vergewissern Sie sich analytisch, dass ein einfacher Übergang zu  $T \rightarrow \infty$  die Dynamik des Gleichungssystems zerstört. Wir wollen das Gleichungssystem daher umnormieren. Definieren Sie eine neue Zeit  $s := t/t_c$ , sowie  $x := \alpha(I - I^*)$  und  $y = \beta(N - N^*)$ , wobei  $*$  jeweils den Fixpunktwert beschreibt. Es seien  $\alpha, \beta, t_c \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten nur den Fall  $J > 0$ .  
Normieren Sie das System so, dass die neue dynamische Gleichung für  $x(s)$  parameterfrei ist. Die restlichen Normierungsgrößen müssen so gewählt werden, dass die dynamische Gleichung für  $y(s)$  im Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  nicht divergiert.
3. Führen Sie nun im normierten System den Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  durch. Zeigen Sie, dass das resultierende System konservativ ist, also periodische Lösungen existieren. Schreiben Sie dazu

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \underline{F}(x(s), y(s)). \quad (3)$$

Ein System ist konservativ, falls eine Funktion  $C(x, y)$  existiert, sodass

$$\underline{F} \cdot (\underline{\nabla} C) = 0. \quad (4)$$

Berechnen Sie aus dieser Bedingung  $C(x, y)$ . Entlang jeder periodischen Lösung ist  $C(x, y) \equiv C = \text{const.}$  Bestimmen Sie daraus einen parametrischen Ausdruck für die periodischen Lösungen (also z.B.  $x(y)$ ) und plotten Sie diese für verschiedene  $C$ . Vergleichen Sie mit dem numerischen Phasenplot des Einschaltvorganges in der  $(I, N)$ -Ebene.

*Hinweis:* Bestimmen Sie  $C(x, y)$  aus Gl.(4) z.B. durch Trennung der Variablen und anschließende Integration.

**Bitte Rückseite beachten! →**

**Aufgabe 18 (10 Punkte):** *Van-der-Pol-Oszillator: Asymptotische Analyse*

Betrachten Sie den Van-der-Pol-Oszillator in mean-field-Näherung mit zeitverzögerter Pyragas-Kontrolle:

$$\ddot{x} - \tilde{\varepsilon}\dot{x} + \omega_0^2 x - K [\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)] = 0, \quad (5)$$

mit  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Wir interessieren uns für das Verhalten nahe der Hopf-Bifurkation,  $\tilde{\varepsilon} < 0$ ,  $|\tilde{\varepsilon}| \ll 1$ .

1. Zeigen Sie, dass im Fall  $K = 0$  die Eigenwerte des um den Fixpunkt linearisierten Systems gegeben sind durch

$$\lambda^{K=0} \approx \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \pm i\omega_0.$$

2. Für  $K > 0$  ist die charakteristische Gleichung nicht analytisch lösbar. Führen Sie eine asymptotische Analyse durch, indem sie den Eigenwert wie folgt entwickeln:

$$\lambda \equiv p + iq + i\omega_0.$$

Hier sind  $p, q \in \mathbb{R}$  kleine Entwicklungsparameter. Es gelten also folgende Abschätzungen:

$$|\tilde{\varepsilon}| \ll 1 \qquad |p| \ll 1 \qquad |q| \ll 1.$$

Wir beschränken uns auf resonante Rückkopplung, d.h.,  $\tau = n\frac{2\pi}{\omega_0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Berechnen Sie die Eigenwerte des Van-der-Pol-Oszillators in Abhängigkeit von  $K$  und  $\tau$ . Vernachlässigen Sie dabei alle Terme von höherer als erster Ordnung in den kleinen Parametern (also z.B.  $p^2$ , aber auch  $pq$ ).

3. Berechnen Sie numerisch die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte für  $\tilde{\varepsilon} = -0.01$ ,  $K = 0.2$ ,  $\omega_0 = 2\pi$  in Abhängigkeit von  $\tau$ . Tragen Sie die analytisch genäherten Werte bei resonanten  $\tau$ -Werten ein und vergleichen sie die genäherte und numerische Lösung an diesen Stellen.

*Hinweis:* Es existieren unendlich viele Eigenwerte. Plotten Sie nur einige Eigenwerte mit den jeweils größten Realteilen.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Donnerstag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im <b>EW 203</b>.</li> <li>• Freitag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im <b>EW 202</b>.</li> </ul>
Übung:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mittwoch, 12:15 – 14:00 Uhr im EW 731.</li> </ul>
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <a href="http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16">http://www.itp.tu-berlin.de/?NDK16</a></li> </ul>
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).</li> <li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.</li> </ul>
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, <a href="mailto:kathy.luedge@tu-berlin.de">kathy.luedge@tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten nach Vereinbarung.</li> <li>• Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, EW 735, 314-23500, <a href="mailto:schoell@physik.tu-berlin.de">schoell@physik.tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten nach Vereinbarung.</li> <li>• Dr. Benjamin Lingnau, EW 629, 314-24254, <a href="mailto:lingnau@mailbox.tu-berlin.de">lingnau@mailbox.tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Do. 13:30-14:30</li> <li>• Andreas Koher, ER 240, 314-29052, <a href="mailto:andreas.koher@campus.tu-berlin.de">andreas.koher@campus.tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Di. 13-14</li> </ul>