Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 7. Juni 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (3+2+1+5=11 Punkte): *Skalares und Vektorpotential als Folge lokaler Eichinvarianz*

Wir gehen vom Hamiltonoperator des freien Teilchens $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. Die Funktion $\Psi(\mathbf{x}, t)$ sei eine Lösung der Schrödingergleichung:

$$\imath\hbar\partial_t \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi(\mathbf{x}, t). \tag{1}$$

Es wird vorausgesetzt, dass die lokale Phase der Wellenfunktion die physikalischen Observablen nicht ändert. Insbesondere die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ bleibt gleich bei Veränderung der lokalen Phase

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t) := e^{\frac{\imath}{\hbar}\varphi(\mathbf{x},t)}\Psi(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

und zwar $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 = |\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)|^2$. Auch alle anderen physikalischen Observablen müssen sich durch die Eichung nicht ändern.

1. Setzen Gl. 2 in Gl. 1 ein und geben Sie die Form des Hamiltonoperators für $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ an mit $\imath\hbar\partial_t\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \tilde{H}\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$.

2. Eine Forderung im Zusammenhang mit der lokalen Eichinvarianz, ist dass die Naturgesetze durch die Eichung ihre Form nicht verändern dürfen. Wie müssen Eichfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ und $g(\mathbf{x}, t)$ in der Schrödingergleichung eingeführt werden, damit diese Eichinvariant ist? Geben Sie ferner die Eichtransformation für $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ und $g(\mathbf{x}, t)$ an.

3. Identifizieren Sie anhand der Eichbedingung das skalare und das Vektorpotential der Elektrodynamik $\phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ und schreiben Sie die Schrödingergleichung unter Verwendung dieser Potentiale $\phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$.

4. In einem der vorherigen Übungsblätter (Blatt 2 A3) wurde der quantenmechanische Strom hergeleitet. Wiederholen Sie diese Aufgabe unter Berücksichtigung der nun eingeführten Potentiale $\phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Interpretieren Sie das Ergebnis! (Stichwort kinematischer Impuls versus kanonischer Impuls)

Aufgabe 2 (1+2+3+3=9 Punkte): *Grundlagen für den gebrochenzahligen Quanten-Hall Effekt*
Für die Erforschung des gebrochenzahligen Quantenhalleekts (FQHE) bekamen Störmer und Tsui (Experiment) und Laughlin (Theorie) 1998 den Nobelpreis. Der FQHE ist eine Anomalie im Transportverhalten eines zweidimensionalen Elektronengases (in der x-y Ebene) in einem starken Magnetfeld entlang der z-Achse.

1. Berechnen Sie $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ für $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Verifizieren Sie über $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dass dies ein räumlich konstantes Magnetfeld entlang der z-Achse beschreibt.

2. Zeigen Sie nun, dass der Hamiltonoperator in einem konstanten Magnetfeld die Form

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\left(\imath\partial_x - \frac{eB}{2\hbar}y\right)^2 + \left(\imath\partial_y + \frac{eB}{2\hbar}x\right)^2 - \partial_z^2\right) \tag{3}$$

   hat.

3. Wir betrachten im Folgenden nur noch die Dimensionen in x und y. Die charakteristische magnetische Länge l ist definiert als $l^2 = \frac{\hbar}{eB}$ und die Zyklotronfrequenz als $\omega_c = \frac{\hbar}{m^* l^2} = \frac{eB}{m^*}$. Zeigen Sie, dass neue Koordinaten ρ eingeführt werden können, so dass

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(-\nabla_\rho^2 + \frac{1}{4}\rho^2 + \frac{L_z}{\hbar}\right) \tag{4}$$

   mit $L_z = \imath\hbar\frac{\partial}{\partial\rho_x}\rho_y - \imath\hbar\frac{\partial}{\partial\rho_y}\rho_x$ gilt.

4. Wir schreiben unsere Ortsoperatoren um in die neuen Operatoren α, $\alpha^\dagger$, β, $\beta^\dagger$: [1]

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho_x - \imath\rho_y}{2}, \qquad & \beta &= \frac{\partial}{\partial\rho_x} - \imath\frac{\partial}{\partial\rho_y}, \\ \alpha^\dagger &= \frac{\rho_x + \imath\rho_y}{2}, \qquad & \beta^\dagger &= -\frac{\partial}{\partial\rho_x} - \imath\frac{\partial}{\partial\rho_y} \end{aligned} \tag{5}$$

   Wir führen nun die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Inter-Landaulevel ein:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^\dagger + \beta^\dagger) \tag{6}$$

   und für Intra-Landaulevel ein:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^\dagger - \beta^\dagger) \qquad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) \tag{7}$$

   Zeigen Sie, dass der Hamiltonian sich schreiben läßt als:

$$H = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{8}$$

[1] Im Prinzip werden hier die 2D Koordinaten x, y auf die komplexe Ebene abgebildet.