Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

8. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 21. Juni 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (7+3=10 Punkte): *Der g-Faktor des Elektrons*
Der Hamilton-Operator eines Elektrons der Masse m und Ladung $q = -e$ in einem entlang der z-Achse ausgerichteten magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$ lautet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - q\hat{\boldsymbol{A}}\right)^2 - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{1}$$

Hier ist $\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{r}}$ das Vektorpotential, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ der Operator des magnetischen Moments des Elektrons. Der Spin-Operator $\hat{\boldsymbol{S}}$ des Elektrons und $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ hängen über die Relation $\hat{\boldsymbol{\mu}} = g\frac{q}{2m}\hat{\boldsymbol{S}}$ zusammen. Dabei ist g der sogenannte g-Faktor. Nach Dirac's Theorie des relativistischen quantenmechanischen Elektrons ist dieser exakt zwei. Mithilfe der Quantenelektrodynamik berechnet man einen leicht größeren Wert. Wir schreiben deshalb $g = 2(1 + a)$. Außerdem definieren wir die folgenden Größen: Den *Geschwindigkeitsoperator* $\hat{\boldsymbol{v}} = \left(\hat{\boldsymbol{p}} - q\hat{\boldsymbol{A}}\right)/m$, die Zyklotronfrequenz $\omega = qB/m$, und die Frequenz $\Omega = a\omega$. In dieser Aufgabe soll die Bewegung des Elektrons analysiert werden, um daraus den Wert des g-Faktors zu bestimmen.

(a) Stellen Sie zunächst die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $\hat{C}_1 = \hat{S}_x\hat{v}_x + \hat{S}_y\hat{v}_y$, $\hat{C}_2 = \hat{S}_x\hat{v}_y - \hat{S}_y\hat{v}_x$, und $\hat{C}_3 = \hat{S}_z\hat{v}_z$ auf und lösen Sie diese. **Hinweis:** Sie erhalten ein System aus drei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, bei welchen die Frequenz Ω eine Rolle spielt.

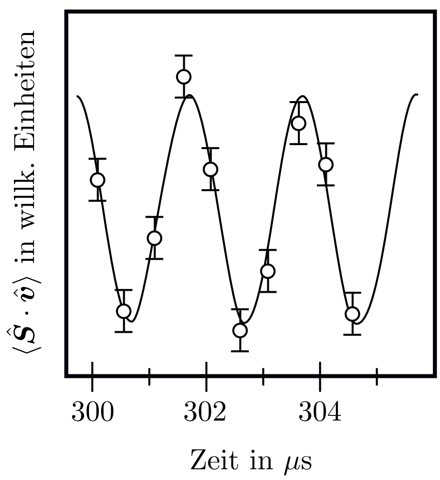

Abbildung 1: Experimentelle Daten aus Phys. Rev. **130**, 852 (1963).

(b) Im Experiment misst man zu verschiedenen Zeiten eine Größe proportional zu $\langle\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}\rangle$, d.h. der Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung. Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) um zu zeigen, dass die Theorie das Ergebnis $\langle\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}\rangle(t) = \alpha + \beta\cos(\Omega t + \varphi)$ liefert. Bestimmen Sie aus den experimentellen Daten in Abb. 1 den g-Faktor des Elektrons. Das $\boldsymbol{B}$-Feld hat dabei im Mittel die Stärke von $B = 1.5 \times 10^{-2}\,T$.

Aufgabe 2 (3 Punkte): *Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren*
Geben Sie explizit die Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren $\hat{J}_+$, $\hat{J}_-$ und $\hat{J}_z$ für ein Drehimpuls mit $j = 3/2$ an. Stellen Sie dabei die Drehimpulsbasis $|j, m\rangle$ durch Kartesische Einheitsvektoren dar, z.B. $|3/2, -3/2\rangle = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3=12 Punkte): *Der Bahndrehimpuls in der Quantenmechanik*
Der Operator des Bahndrehimpulses ergibt sich durch Quantisierung des klassischen Drehimpulses,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \to \hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}. \tag{2}$$

(a) Verwenden Sie die Ortsdarstellung für $\hat{\boldsymbol{r}}$ und $\hat{\boldsymbol{p}}$ und zeigen Sie, dass die Komponenten des Operators des Bahndrehimpulses in Kugelkoordinaten durch

$$\hat{L}_x = -i\hbar\Big(-\sin\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\Big), \tag{3}$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\Big(\cos\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\partial_\varphi\Big) \text{ und} \tag{4}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\,\partial_\varphi \tag{5}$$

gegeben sind. Stellen Sie dazu zunächst die Ableitungen in kartesischen Koordinaten durch die Ableitungen in Kugelkoordianten dar.

Hinweis: Die Koordinatentransformation ist durch die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(r,\vartheta,\varphi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi/r & \cos\vartheta\sin\varphi/r & -\sin\vartheta/r \\ -\sin\varphi/(r\sin\vartheta) & \cos\varphi/(r\sin\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

bestimmt.

(b) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a) um $\hat{L}_x^2, \hat{L}_y^2, \hat{L}_z^2$ und daraus das Quadrat des Bahndrehimpulses

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta\big(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\big) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\partial_\varphi^2\right] \tag{7}$$

zu bestimmen.

Betrachten Sie nun die beiden Wellenfunktionen

$$\psi_1(\boldsymbol{r}) = N_1 R_1(r)\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\big(x^2 + ar^2 - y^2\big) \text{ und } \psi_2(\boldsymbol{r}) = N_2 R_2(r)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\big(x - iy\big), \text{ mit } a \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Die Konstanten N_1 und N_2 sind so gewählt, dass die Wellenfunktionen auf eins normiert sind.

(c) Sind diese Funktionen Eigenfunktionen von $\hat{L}_z$ und $\hat{\boldsymbol{L}}^2$? Wenn ja, bestimmen Sie die Eigenwerte. Benutzen Sie dazu die explizite Darstellung des Drehimpulsoperators im Ortsraum aus den Aufgabenteilen (a) und (b).

(d) Berechnen Sie schließlich die Erwartungswerte von $\hat{L}_z$ und $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ in diesen beiden Zuständen. Für diesen Aufgabenteil können Sie verwenden, dass die Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ sind. **Hinweis:** Es ist *sehr* hilfreich den Winkelanteil der Wellenfunktionen $\psi_n(\boldsymbol{r})$ durch Kugelflächenfunktionen darzustellen.