Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 1

Abgabe **Do., 28.04.2016, 14:15 Uhr,** vor der Vorlesung
Lösungen bitte großzügig kommentiert und mit Namen abgeben!

Aufgabe 1. *Mikrozustände klassischer, idealer Teilchen* **(7 Punkte)**

In einem Kasten mit Volumen V befinden sich N nichtwechselwirkende, identische Teilchen ohne Einfluss der Gravitation oder anderer äußerer Felder. Betrachten Sie Aufteilungen des Gesamtvolumens $\mathcal{V}$ in zwei Volumina $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$ der Größen V_1 und $V_2 = V - V_1$: Ein Mikrozustand ist charakterisiert durch die Anzahl n der Teilchen in $\mathcal{V}_1$ (bzw. die Anzahl $N - n$ in $\mathcal{V}_2$).

a) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten p_j, ein Teilchen im Volumen $\mathcal{V}_j$ anzutreffen?

b) Wie viele Mikrozustände gibt es insgesamt?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_N(n)$ der Aufteilungen mit n Teilchen im Volumen V_1, und überprüfen Sie die Normierung. Geben Sie die Werte von $P_N(n)$ explizit an für $p_1 = p_2$ und $N = 4$ Teilchen.

d) Bestimmen Sie die Varianz $\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle$ und die relative Standardabweichung $\sqrt{\langle (\Delta n)^2 \rangle} / \langle n \rangle$, und betrachten Sie den Limes $N \to \infty$.

Aufgabe 2. *Zentraler Grenzwertsatz/Gesetz der großen Zahlen* **(6 Punkte)**

Seien $X_1, \ldots, X_N$ statistisch unabhängige und identisch verteilte (engl. *i.i.d.*), reellwertige Zufallsvariablen, die alle die gleiche (beliebige) Verteilung $\varrho(x_1)$ und Mittelwert $\mu := \langle X_1 \rangle \neq 0$ besitzen. Die *charakteristische Funktion* der Wahrscheinlichkeitsdichte oder -verteilung $\varrho(x)$ einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$\phi(k) := \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kX} \right\rangle, \; k \in \mathbb{R},$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ den Erwartungswert bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ bezeichnet; falls die Wertemenge von X reellwertig und kontinuierlich: $\langle X \rangle := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, x \, \varrho(x)$.

a) Drücken Sie die charakteristische Funktion $\phi_N(k)$ der Zufallsvariablen(-summe)

$$S_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (X_j - \mu)$$

durch $\phi_\mu(k) := \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(X_1 - \mu)} \right\rangle$ aus, und verwenden Sie eine Entwicklung, um zu zeigen:

$$\lim_{N \to \infty} \phi_N(k) = \exp\left\{ -\frac{\left(\left\langle X_1^2 \right\rangle - \mu^2\right) k^2}{2} \right\} \quad \forall \, k \in \mathbb{R}.$$

Was impliziert dieses Ergebnis für die Verteilung von S_N im Limes $N \to \infty$?

b) Was folgt für den Mittelwert μ_N und die relative Standardabweichung σ_N / μ_N der Zufallsvariablen $Y_N := \sum_{j=1}^{N} X_j$?

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *Mikrokanonisches Ensemble* **(7 Punkte)**

Betrachten Sie N einatomige, ideale (nichtwechselwirkende) Teilchen in einem Volumen V mit der Hamiltonfunktion

$$H\left(\{\boldsymbol{p}^N\},\{\boldsymbol{q}^N\}\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m}.$$

Das mikrokanonische Ensemble umfasst alle Mikrozustände, deren Hamiltonfunktion Werte in der Energieschale $[E, E+\Delta E]$ (mit $\Delta E \to 0$) annimmt.

a) Berechnen Sie die mikrokanonische Zustandssumme $\Omega(E,V,N)$ im thermodynamischen Limes großer Teilchenzahl $N \to \infty$.

b) Bestimmen Sie die Entropie $S = k_\mathrm{B} \ln \Omega(E,V,N)$ im thermodynamischen Limes, und vergewissern Sie sich, dass sie extensiv ist.

c) Leiten Sie über die Temperatur T die kalorische Zustandsgleichung $E(T,V,N)$ und über den Druck p die thermische Zustandsgleichung $p(T,V,N)$ ab.

- **Vorlesung**: Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium**: Di 16–18 Uhr, in **EB 133C**
- **Kriterien für den Scheinerwerb**: 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**

  * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
  * M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)
  * K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)
  * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
  * N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
  * H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)
  * L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)
  * J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)