

Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
 Dr. Alice von der Heydt
 Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 3

Abgabe **Do., 19.05.2016, 14:15 Uhr**,
 vor der Vorlesung
Lösungen bitte großzügig kommentiert und mit Namen abgeben!

Aufgabe 8. Hubbard-Stratonovich-Transformation für langreichweitiges Ising-Modell (11 Punkte)

Betrachten Sie ein Ising-Modell mit „unendlich“-reichweitiger, homogener Paarwechselwirkung in einem homogenen externen Feld h (vgl. Vorlesung), mit Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = -\frac{J_0}{2N} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N s_i s_j - h \sum_{i=1}^N s_i$$

- a) Führen Sie zur Berechnung der kanonischen Zustandssumme $Z_K = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}$ eine Hubbard-Stratonovich-Transformation mit einem Hilfsfeld H aus, um nachzuvollziehen, dass Z_K in die folgende Form gebracht werden kann:

$$Z_K = e^{-\frac{\beta J_0}{2}} \sqrt{\frac{N}{2\pi\beta J_0}} \int dH \exp \left\{ -N \left(\frac{1}{2\beta J_0} H^2 - \ln \{ 2 \cosh(H + \beta h) \} \right) \right\}$$

- b) Betrachten Sie die (Variations-) Funktion der Freien Energie im Exponenten, $Nf(H)$, in Abhängigkeit des Hilfsfelds H : Verwenden Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung eine Sattelpunktmethode (Entwicklung von f), um die Freie Energie F zu bestimmen. Wie genau ist die Approximation für dieses Modell im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$?
- c) Zeigen Sie, dass die Magnetisierung $m = -\partial F / \partial h$ für dieses Modell durch folgende implizite (Selbstkonsistenz-) Gleichung bestimmt ist:

$$m = \tanh(\beta J_0 m + \beta h)$$

- d) Bestimmen Sie die Nullfeld-Suszeptibilität $\chi_0 := \left. \frac{\partial m}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0}$.

Aufgabe 9. Mean-Field-Näherung für ein Gittergas-Modell

(9 Punkte)

Ein Fluid werde modelliert durch variable Besetzung der M Plätze eines Gitters mit einer (variablen) Teilchenzahl N . Die kurzreichweitige 'hard-core'-Abstoßung zwischen Fluidteilchen wird dadurch berücksichtigt, dass jeder Gitterplatz nur mit maximal einem Teilchen besetzt werden kann (Besetzungszahlen $n_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, 2, \dots, M$ und $N := \sum_{i=1}^M n_i$), die Anziehung für größere Abstände durch ein Kastenpotential für benachbarte Gitterplätze. Hier betrachten wir ein Mean-Field-Modell mit einer gemittelten Potentialtiefe ε/M (mit $\varepsilon > 0$) für alle Paare von Gitterplätzen, also

$$\mathcal{H} = -\frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i,j=1}^M n_i n_j$$

- a) Um die großkanonische Zustandssumme $Z_{GK} = \sum_{\{n\}} e^{-\beta \mathcal{H} + \beta \mu N}$ (vgl. Vorlesung) für eine Mean-Field-Näherung geeignet umzuformen, entkoppeln Sie die Wechselwirkungen wieder mit Hilfe der Hubbard-Stratonovich-Transformation (Hilfsfeld ν).

- b) Führen Sie wieder eine Sattelpunktsintegration im thermodynamischen Limes $M \rightarrow \infty$ aus: Bestimmen Sie in diesem Fall die Funktion $g(\nu)$ des großkanonischen Potentials, und stellen Sie die Gleichung für $\bar{\nu}$ (Maximum des Integranden) auf.
- c) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen $\bar{\nu}$ und der mittleren Teilchendichte $\varrho := \langle N \rangle / M$ her. Leiten Sie eine Selbstkonsistenzgleichung für ϱ ab.

- **Vorlesung:** Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium:** Di 16–18 Uhr, in **EW 229**
- **Kriterien für den Scheinerwerb:** 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**
 - * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
 - * M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)
 - * K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)
 - * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
 - * N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
 - * H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)
 - * L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)
 - * J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)