Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 4

Abgabe **Do., 26.05.2016, 14:15 Uhr,** vor der Vorlesung
Lösungen bitte großzügig kommentiert und mit Namen abgeben!

Aufgabe 10. *Dehnung der entropischen Kette* **(6 Punkte)**

In Aufgabe 5 (Blatt 2) haben Sie gezeigt, dass die Entropie einer eindimensionalen Kette der Länge L mit N Segmenten im thermodynamischen Limes gegeben ist durch

$$S = \frac{Nk_\mathrm{B}}{2}\left\{(1+x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{2}{1-x}\right)\right\}, \text{ mit } x := \frac{L}{Nl}.$$

a) Leiten Sie bei gegebener Länge L und festem N eine Gleichgewichtsbedingung für eine beliebige Stelle N_1 der Kette her, indem Sie die Kette virtuell in zwei Teile mit N_1 und $N_2 = N - N_1$ Segmenten aufteilen und die Gesamtentropie maximieren.

b) Welche Kraft $f := -T \left.\frac{\partial S}{\partial L}\right)_N$ ist nötig, um die Kette auf einer gegebenen Länge L zu halten? Bestimmen Sie aus f die Kraft-Dehnungs-Relation $L(f,T)$. Unter welchen Bedingungen gilt das Hooke'sche Gesetz?

c) Wie verhält sich die Kette qualitativ, wenn bei konstanter Kraft die Temperatur erhöht wird?

Aufgabe 11. *Einstein-Modell* **(8 Punkte)**

Ein einfaches Modell für die Schwingungsanregungen eines Festkörpers beruht auf den folgenden Annahmen:

- Die Schwingungsanregungen lassen sich durch N unabhängige harmonische Oszillatoren der Frequenz ω beschreiben.
- Jeder Oszillator kann ein ganzzahliges Vielfaches des Energiequantums $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ speichern.

a) Wie viele Mikrozustände gibt es für N Oszillatoren und Gesamtenergie $E = Q\varepsilon_0$?

Hinweis: Stellen Sie sich einen Mikrozustand der N Oszillatoren bildlich als Sequenz von entsprechend vielen Trennwänden und Q Quanten vor, wobei sowohl Quanten wie Trennwände ununterscheidbar sind.

b) Berechnen Sie die spezifische Entropie $\sigma := S/N$ des Festkörpers als Funktion der spezifischen Energie $\varepsilon := E/N$, und nähern Sie σ für große N.

c) Geben Sie die spezifische Energie ε als Funktion der Temperatur an.

d) Berechnen Sie die spezifische Wärme $c(T) := \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}T$. Wie verhält sie sich asymptotisch für $T \to 0$?

Aufgabe 12. *Kritisches Verhalten des Mean-Field-Gittergas-Modells* **(6 Punkte)**

Betrachten Sie erneut das Gittergas-Modell aus Aufgabe 9:

a) Zeigen Sie ausgehend von der Selbstkonsistenzgleichung, dass für $\mu_c = -\varepsilon/2$ die mittlere Teilchendichte $\varrho_c = 1/2$ ist.

Bitte wenden!

b) Drücken Sie die Selbstkonsistenzgleichung durch $\Delta\varrho := \varrho - \varrho_c$ und $\Delta\mu := \mu - \mu_c$ aus, und zeigen Sie, dass sie folgende Form annimmt:

$$\Delta\varrho = \frac{1}{2}\tanh\left\{\frac{\beta\left(\varepsilon\Delta\varrho + \Delta\mu\right)}{2}\right\}$$

c) Schreiben Sie auch das großkanonische Potential um als Funktion von $\Delta\varrho$ und $\Delta\mu$. Zeigen Sie, dass die kritische Temperatur $T_c = \frac{\varepsilon}{4k_\mathrm{B}}$ ist.

- **Vorlesung**: Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium**: Di 16–18 Uhr, in **EW 229**
- **Kriterien für den Scheinerwerb**: 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**

  ∗ F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)

  ∗ M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)

  ∗ K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)

  ∗ P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)

  ∗ N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)

  ∗ H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)

  ∗ L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)

  ∗ J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)