

Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
 Dr. Alice von der Heydt
 Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 5

Abgabe Do., 02.06.2016, 14:15 Uhr,
 vor der Vorlesung
 Lösungen bitte großzügig kommentiert
 und mit Namen abgeben!

Aufgabe 13. Phasenübergang des Mean-Field-Gittergas-Modells

(10 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal das Gittergas-Modell aus Aufgabe 9 und Aufgabe 12:

- a) i. Skizzieren bzw. plotten Sie das großkanonische Potential als Funktion von $\Delta\varrho$ für
- A. $T > T_c$
 - B. $T < T_c$
- jeweils für die Fälle $\Delta\mu < 0$, $\Delta\mu = 0$, $\Delta\mu > 0$, einmal für $|\Delta\mu| \ll \varepsilon$, einmal für $|\Delta\mu| \gg \varepsilon$.
- ii. Diskutieren Sie die Bedeutung der Extrema und Wendepunkte.
- b) Stellen Sie für $\Delta\mu = 0$ den Verlauf von $\Delta\varrho$ als Funktion von T graphisch dar.
- c) Sei $|T - T_c|/T_c \ll 1$ und $\Delta\mu/\mu_c \ll 1$: Zeigen Sie, dass das Modell die folgenden kritischen Exponenten aufweist:
- i. Für $T < T_c$ und $\mu = \mu_c$ ist $\Delta\varrho \propto (T_c - T)^{1/2}$.
 - ii. Für $T = T_c$ ist $\Delta\varrho \propto (\mu - \mu_c)^{1/3}$.
 - iii. Für $\mu = \mu_c$ ist die Steigung $\frac{\partial\varrho}{\partial\mu} \propto |T - T_c|^{-1}$.
- d) Zeigen Sie, dass für $\mu = \mu_c$ die Ableitung des großkanonischen Potentials $\frac{\partial g}{\partial T}$ bei $T = T_c$ unstetig ist (Sprung in der spezifischen Wärme).

Aufgabe 14. Kritisches Verhalten des van-der-Waals-Gases

(10 Punkte)

Wie vermutlich aus früheren Vorlesungen bekannt, ist die innere Energie eines van-der-Waals-Gases oberhalb der kritischen Temperatur T_c gegeben durch

$$E = \frac{3Nk_B T}{2} - \frac{Na}{v}$$

Unterhalb der kritischen Temperatur T_c separiert das System in eine flüssige Phase mit spezifischem Volumen v_f und eine gasförmige Phase mit spezifischem Volumen v_g , so dass sich die innere Energie aus den Beiträgen der beiden Phasen zusammensetzt. Hier untersuchen Sie das Verhalten der spezifischen Wärme in der Nähe des kritischen Punktes (T_c, p_c, v_c) .

- a) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität C_V des van-der-Waals-Gases oberhalb der kritischen Temperatur gleich der eines idealen Gases ist.
- b) Ausgehend vom kritischen Punkt werde die Temperatur bei konstantem Gesamtvolumen abgesenkt. Welcher Bruchteil r_f (bzw. r_g) des Systems liegt jetzt in der flüssigen (bzw. gasförmigen) Phase vor? Berechnen Sie r_f und r_g als Funktion der Volumina v_c , v_f und v_g .

Bitte wenden!

- c) Verwendet man in reduzierten Variablen den symmetrischen Ansatz $v_f = 1 - \epsilon$, $v_g = 1 + \epsilon$, um das Verhalten der spezifischen Volumina nahe des kritischen Punktes zu beschreiben, ergibt sich (in niedrigster Ordnung) die Relation $\epsilon = 2\sqrt{t}$, wobei $t := (T_c - T)/T_c$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Relation aus der inneren Energie $E = r_f E_f + r_g E_g$ die Wärmekapazität C_V nahe des kritischen Punktes, für $T < T_c$. Dabei genügt es, bei der inneren Energie Terme bis zur linearen Ordnung in t zu berücksichtigen.

Hinweis: Volumen und Temperatur am kritischen Punkt sind $v_c = 3b$ und $k_B T_c = 8a/(27b)$.

- d) Wie verhält sich demnach die Wärmekapazität $C_V(T)$ beim Durchlaufen des kritischen Punktes von einer Temperatur $T > T_c$ zu einer Temperatur $T < T_c$?

- **Vorlesung:** Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium:** Di 16–18 Uhr, in **EW 229**
- **Kriterien für den Scheinerwerb:** 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**
 - * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
 - * M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)
 - * K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)
 - * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
 - * N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
 - * H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)
 - * L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)
 - * J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)