

Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
 Dr. Alice von der Heydt
 Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 6

Abgabe **Do., 09.06.2016, 14:15 Uhr**,
 vor der Vorlesung
Lösungen bitte großzügig kommentiert und mit Namen abgeben!

Aufgabe 15. Spinkorrelation der Ising-Kette mit periodischen Randbedingungen (10 Punkte)

Betrachten Sie das eindimensionale Ising-Modell (N Spins) mit Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn und periodischen Randbedingungen, d.h. $s_{N+1} = s_1$, im homogenen Feld h :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{j=1}^N s_j s_{j+1} - h \sum_{j=1}^N s_j$$

- a) Zeigen Sie, dass sich die kanonische Zustandssumme \mathcal{Z} mit einer geeigneten Funktion $t(s_j, s_{j+1})$ darstellen lässt als

$$\mathcal{Z} = \sum_{s_1=\pm 1} \cdots \sum_{s_N=\pm 1} t(s_1, s_2) \cdots t(s_N, s_1)$$

und mit der Matrixdarstellung \mathcal{T} von t die Form

$$\mathcal{Z} = \text{Tr } \mathcal{T}^N$$

annimmt (\mathcal{T} hat die Einträge $\mathcal{T}_{s_1 s_2} = t(s_1, s_2)$, und Tr bezeichnet den Spur-Operator).

- b) Berechnen Sie über die Eigenwerte λ_1, λ_2 von \mathcal{T} die Zustandssumme \mathcal{Z} im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$.
 c) Berechnen Sie aus \mathcal{Z} die Freie Energie und die Magnetisierung pro Spin im Limes $N \rightarrow \infty$.
 d) Berechnen Sie für $h = 0$ die 2-Spin-Korrelationsfunktion

$$G(d) := \langle s_j s_{j+d} \rangle = e^{-d/\xi}$$

und die Korrelationslänge ξ im Limes $N \rightarrow \infty$ und $d \ll N$.

Hinweis: Das Ergebnis für $G(d)$ ist

$$G(d) = \left(\frac{\lambda_2(h=0)}{\lambda_1(h=0)} \right)^d = \{\tanh(\beta J)\}^d$$

Aufgabe 16. Maxwellkonstruktion (5 Punkte)

Im pV -Diagramm des van-der-Waals-Gases mit der Zustandsgleichung

$$p = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad (1)$$

(vgl. Vorlesung) gibt es unterhalb der kritischen Temperatur unphysikalische Bereiche der Isothermen mit $\kappa_T = -(1/v)\partial v/\partial p < 0$ (entsprechend mechanischer Instabilität). Mit Hilfe der Maxwellkonstruktion kann der Verlauf der Isothermen in diesen Bereichen der Koexistenz flüssiger und gasförmiger Phase korrigiert werden:

Bitte wenden!

- a) Zeigen Sie ausgehend von der Gleichgewichtsbedingung $\mu_f(p_{fg}, T) = \mu_g(p_{fg}, T)$ im Koexistenzgebiet die folgende Relation:

$$p_{fg}(V_g - V_f) = \int_{V_f}^{V_g} p \, dV$$

- b) Skizzieren Sie eine Isotherme des van-der-Waals-Gases für $T < T_c$: Welcher graphischen Konstruktion entspricht die in a) hergeleitete Relation? Zeichnen Sie mit Hilfe dieser Konstruktion den Verlauf der physikalischen Isotherme ein.

Aufgabe 17. Kritische Exponenten

(5 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal die Zustandsgleichung Glg. (1) eines van-der-Waals-Gases in der Nähe des kritischen Punkts (vgl. Vorlesung):

- a) Bestimmen Sie das kritische Verhalten der isothermen Kompressibilität κ_T , und diskutieren Sie den zugehörigen kritischen Exponenten.
- b) Geben Sie den Druck auf der kritischen Isotherme in Abhängigkeit der Dichtedifferenz an, und bestimmen Sie den kritischen Exponenten.

- **Vorlesung:** Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium:** Di 16–18 Uhr, in **EW 229**
- **Kriterien für den Scheinerwerb:** 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**
 - * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
 - * M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)
 - * K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)
 - * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
 - * N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
 - * H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)
 - * L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)
 - * J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)