

Prof. Dr. Holger Stark  
Johannes Blaschke, Jakob Löber, Torben Winzer, Maria Zeitz

## 9. Übungsblatt – TPIV: Thermodynamik und Statistische Physik

**Abgabe: Fr. 24.06.2016 bis 08:30 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

### **M** Aufgabe 25: Landauentwicklung einer binären Mischung

Eine Legierung (z.B. Messing) bestehe aus  $N_A$  Atomen des Typs  $A$  und  $N_B$  Atomen des Typs  $B$ , stellt also eine sog. binäre Mischung dar.

- (a) Berechnen Sie die Mischungsentropie  $S$  unter der Annahme  $N_A, N_B \gg 1$ . Verwenden Sie die Stirlingformel  $\ln N! \approx N \ln N - N$ . **Hinweis:** Verwenden Sie die Mischungsentropie  $S = k_B \ln g(N_A, N_B)$  wobei  $g(N_A, N_B)$  die Anzahl ununterscheidbaren Konfigurationen mit festen  $N = N_A + N_B$  ist, analog zu Aufgabe 12.
- (b) Berechnen Sie die freie Energiedichte  $f = F/N$  als Funktion des Ordnungsparameters  $\phi \equiv (N_A - N_B)/N$ . Entwickeln Sie  $f(\phi)$  bis zur vierten Ordnung in  $\phi$ :

$$f(\phi) \approx a_0(T) + \frac{a_2(T)}{2} \phi^2 + \frac{a_4(T)}{4} \phi^4.$$

Solch eine Entwicklung nennt man Landauentwicklung. Zeigen Sie, dass  $f(\phi)$  unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_c$  nicht mehr überall konvex ist und skizzieren Sie  $f(\phi)$  für  $T > T_c$ ,  $T = T_c$ ,  $T < T_c$  und  $T = 0$ . **Hinweis:** Die Wechselwirkung zwischen der Atomen führt zu einer inneren Energie der Form:  $U = -k\phi^2$ .

Rechnen Sie im Folgenden mit der genäherten freien Energiedichte weiter.

- (c) Bestimmen Sie die sogenannte Spinodale  $\phi_{sp}(T)$ . Sie begrenzt den Bereich  $\phi < |\phi_{sp}(T)|$ , in dem  $f(\phi)$  für  $T < T_c$  nicht konvex ist. Zeichnen Sie  $\pm\phi_{sp}(T)$  in ein  $(T, \phi)$  Diagramm ein.
- (d) Bestimmen Sie die Binodale  $\phi_{bi}(T)$ , welche charakterisiert ist durch eine Phasenseparation in von  $A$  bzw.  $B$  Atomen dominierte Bereiche mit  $\phi = \pm\phi_{bi}(T)$ , wobei  $\pm\phi_{bi}(T)$  die freie Energiedichte  $f(\phi)$  minimiert. Zeichnen Sie  $\pm\phi_{bi}(T)$  in das  $(T, \phi)$  Diagramm aus (c) ein.

### **S** Aufgabe 26 (14 Punkte): Kritische Exponenten

Kritische Exponenten werden zur Beschreibung des Verhaltens eines physikalischen Systems in der Nähe des kritischen Punktes verwendet. Im Folgenden sollen die kritischen Exponenten des Van-der-Waals-Gases und der Landau-Theorie für Para-/Ferromagneten berechnet werden. Dazu ist es zweckmäßig, folgende relative Größen zu definieren:

$$\tau \equiv \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \omega \equiv \frac{V - V_c}{V_c}, \quad \pi \equiv \frac{p - p_c}{p_c}.$$

Wobei  $T_c$ ,  $V_c$ , und  $p_c$  die Temperatur, das Volumen, und der Druck am kritischen Punkt sind. Bestimmen Sie nun folgende kritische Exponenten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  aus dem asymptotischen Verhalten bei Annäherung an den kritischen Punkt (d.h. asymptotisch für  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$  und  $\pi \rightarrow 0$ ):

- (a) Den Exponenten  $\alpha$  (mit  $T > T_c$ )
- i) aus dem Verhalten der Wärmekapazität entlang der kritischen Isochoren ( $V = V_c$ ), für das van-der-Waals Gas

$$c_V \propto \tau^{-\alpha},$$

- ii) und der kritischen Isobaren ( $p = p_c$ ), für die Landau-Theorie

$$c_p \propto \tau^{-\alpha}.$$

9. Übung TPIV SS 16

(b) Den Exponenten  $\gamma$  (mit  $T > T_c$ )

i) aus dem Verhalten der isothermen Kompressibilität  $\kappa_T$  des van-der-Waals Gases auf der kritischen Isochoren ( $V = V_c$ ):

$$\kappa_T \propto \tau^{-\gamma},$$

ii) und der molaren magnetischen Suszeptibilität  $\chi^{-1} = (\partial H / \partial m)_{T,p}$  der Landau-Theorie:

$$\chi^{-1} \propto \tau^{-\gamma}.$$

(c) Den Exponenten  $\delta$  auf der kritischen Isothermen ( $T = T_c$ )

i) aus dem Verhalten des Druckes für das van-der-Waals Gas:

$$\pi \propto |\omega|^\delta \operatorname{sign}(V - V_c),$$

ii) und aus dem Verhalten der molaren Magnetisierung  $m$  der Landau-Theorie

$$m \propto |H|^{1/\delta},$$

(d) Den Exponenten  $\beta$  aus dem Dichteverhalten entlang der Koexistenzkurve zwischen flüssiger (f) und gasförmiger (g) Phase im van-der-Waals Gas:

$$v_g - v_f \propto |\tau|^\beta.$$

wobei  $v = V/N$  das Molvolumen ist.

**S Aufgabe 27 (6 Punkte):** *Dampfdruck eines Wassertröpfchens/einer Gasblase*

Der Gleichgewichtsdampfdruck über einem Tröpfchen einer Flüssigkeit ist ein Anderer als über einer ebenen Oberfläche der gleichen Flüssigkeit. Ursache hierfür ist die Oberflächenspannung  $\sigma$ . Sei  $N_t$  die Anzahl der Mole der Flüssigkeit in dem kugelförmig angenommenen Tröpfchen (Radius  $r$ ). Die freie Enthalpie eines solchen Tröpfchens läßt sich schreiben als

$$G_t(T, P) = N_t g_f(T, P) + 4\pi\sigma r^2 \quad (1)$$

wobei  $g_f(T, P)$  die molare freie Enthalpie der Flüssigkeit ist.

- Interpretieren Sie diesen Ausdruck.
- Bestimmen sie die molare freie Enthalpie des Dampfes  $g_d(T, P)$  im Gleichgewicht für beliebiges  $r$  und für  $r \rightarrow \infty$ .
- Berechnen Sie den Unterschied des Dampfdrucks  $\Delta P = P_r - P_\infty$  durch eine Taylor-Entwicklung der Gleichgewichtsbedingung nach  $\Delta P$ .
- Vereinfachen Sie diesen Ausdruck unter der Annahme, daß das Molvolumen der Flüssigkeit gegen das des Dampfes vernachlässigt werden kann.
- Übertragen Sie die Überlegung auf eine Dampfblase in einer Flüssigkeit.

Prof. Dr. Holger Stark  
Johannes Blaschke, Jakob Löber, Torben Winzer, Maria Zeitz

**Zum Übungsbetrieb:** Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Bedingung für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Es müssen mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte erreicht werden. Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen. Ab dem zweiten Übungsblatt werden Einzel- und Zweierabgaben nicht mehr akzeptiert!
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr
08-10					EW 203 HS
10-12	EW 229 Johannes		EW 226 Torben		EW 731 Maria
12-14			EW 203 HS		ER 164 Jakob
14-16					
16-18					

Sprechstunden		
Prof. Dr. Holger Stark	Fr 11:30–12:00	EW 709
Johannes Blaschke	Mi 10–11	EW 708
Jakob Löber	Mi 14 –15	EW 737
Torben Winzer	Do 14–15	EW 703
Maria Zeitz	Do 11 –12	EW 702