Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo. 03.07.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten im ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 29 (3 Punkte): *Elliptische Koordinaten*

Die elliptischen Koordinaten mit $r \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$ und $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$ sind folgendermaßen in kartesischen Koordinaten definiert:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} ar\cos\phi\cos\theta \\ br\sin\phi\cos\theta \\ cr\sin\theta \end{pmatrix}$$

Für ein festes r wird die Oberfläche des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$ beschrieben. Dieser Körper hat die Halbachsen a, b und c in x-, y- und z-Richtung. Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\partial_r\underline{r}$, $\partial_\phi\underline{r}$, $\partial_\theta\underline{r}$, die normierten Einheitsvektoren $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\phi$ und $\underline{e}_z$ (das begleitende Dreibein) sowie die metrischen Koeffizienten.

Aufgabe 30 (5 Punkte): *Bahnkurve im Schwimmbad*

Angela sieht im Schwimmbad eine Rutsche in der Form einer Schraubenlinie. Als angehende Physikerin möchte sie nichts dem Zufall überlassen. Vor der Rutschpartie überlegt sie sich daher Folgendes: „*Wenn ich, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, mit der Kreisfrequenz ω auf dieser Schraubenlinie mit dem Radius R um die z-Achse herumrutsche, bedeutet dies, dass die Projektion der Bahnkurve auf die x, y-Ebene eine Kreisbahn mit dem Radius R ist. Falls meine Geschwindigkeit in z-Richtung den Betrag v_z hat und ich zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $\vec{P} = (R, 0, 0)$ passiere kann ich mir meine Bahn im Vorhinein überlegen.*“
Sie können nun Angela dabei helfen:

(a) Geben Sie die Bahnkurve $\underline{r}(t)$ für diese Bewegung an. (0.5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von Angela und geben Sie das Ergebnis bezüglich einer Basis aus Zylinderkoordinaten an. (1 Punkt)

(c) Berechnen Sie die in der Zeit t zurückgelegte Weglänge $s(t) = \int_0^t |\frac{d\underline{r}(t')}{dt'}|dt'$ und drücken Sie $\underline{r}$ als Funktion von s aus. Definieren Sie eine (konstante) Bahngeschwindigkeit. Wie lang ist der zurückgelegte Weg nach einem vollen Umlauf auf der Schraubenlinie? (1.5 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Tangenten-, Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren $\underline{t}$, $\underline{n}$ und $\underline{b}$ entlang der Bahnkurve, die das begleitende Dreibein bilden. Stellen Sie die Vektoren als Linearkombinationen der Basisvektoren $\underline{e_r}$, $\underline{e_\phi}$ und $\underline{e_z}$ dar. (2 Punkte)

Hinweis: Die Tangenten-,Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren sind wie folgt definiert:

$$\underline{t} = \frac{d\underline{r}(s)}{ds}, \quad \underline{\hat{n}} = \frac{d\underline{t}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\underline{t}(s)}{ds}\right|, \quad \underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$$

Außerdem sind die Basisvektoren in Zylinderkoordinaten gegeben durch (siehe auch Bonusaufgabe 28):

$$\underline{e_r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e_\phi} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 31 (3 Punkte): *Divergenz in kartesischen Koordinaten*
Es sei $\underline{r} = (x, y, z)^T$ ein Vektor mit Betrag $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Und es sei $\underline{a}$ ein konstanter Vektor, der also nicht von $\underline{r}$ abhängt. Berechnen Sie die Divergenz:

(a) $\underline{\nabla} \cdot (r\underline{a})$

(b) $\underline{\nabla} \cdot (\underline{r}/r)$

(c) $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$ mit $\underline{v} = \frac{1}{r}(y, -x, 1)1^T$

Hinweis: Die Divergenz eines Vektorfelds div($\underline{v}$) $= \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$ ist definiert als Skalarprodukt zwischen dem Nablaoperator $\underline{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T$ und einem beliebigen Vektorfeld $\underline{v}(x, y, z)$.

Aufgabe 32 (9 Punkte): *Kugelkoordinaten, Gradient*
Betrachten Sie die folgende Transformation der kartesischen Komponenten des Ortsvektors $\underline{r} \equiv (x, y, z)^T$ auf Kugelkoordinaten in den Variablen $r \in [0, \infty], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta; \quad y = r\sin\varphi\sin\theta; \quad z = r\cos\theta.$$

(a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor $\underline{\underline{J}}$ und seine Determinante $\det \underline{\underline{J}}$. Diskutieren Sie den Fall $r = 0$. Berechnen Sie ferner die normierten Basisvektoren für Kugelkoordinaten. (4 Punkt)

(b) Leiten Sie den Gradienten in Kugelkoordinaten her (siehe Hinweis). (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie die Gradienten $\underline{\nabla} r$ mit $r = |\underline{r}|$ und $\underline{\nabla} f(r)$ für eine allgemeine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Kugelkoordinaten. (1 Punkt)

Das Potential eines Dipols ist durch $U(r, \theta) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ gegeben. Hierbei sind p und ϵ_0 Konstanten.

(d) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E} = -\underline{\nabla} U$ und dessen Betrag $|\underline{E}|$. Mit welcher Potenz nimmt $|\underline{E}|$ mit dem Abstand vom Dipol ab und für welche Winkel θ ist $|\underline{E}|$ minimal bzw. maximal? (3 Punkt)

Hinweis: Der Gradient $\underline{\nabla}$ in krummlinigen Koordinaten ist definiert durch $\underline{\nabla} = \sum_i \underline{e_i} \frac{1}{|\partial_i \underline{r}|} \partial_i$.
Für Kugelkoordinaten im Speziellen bedeutet das:

$$\underline{\nabla} = \underline{e_r} \frac{1}{|\partial_r \underline{r}|} \partial_r + \underline{e_\phi} \frac{1}{|\partial_\phi \underline{r}|} \partial_\phi + \underline{e_\theta} \frac{1}{|\partial_\theta \underline{r}|} \partial_\theta$$

Bonusaufgabe 33 (3 Zusatzpunkte): *Ergebnisse plotten*
Zeichnen Sie mit *Mathematica* einen Konturplot von U und einen Vektorfeldplot von $\underline{E}$ aus der vorhergehenden Aufgabe. Welchen Zusammenhang erkennen Sie?
(*Hinweise*: Verwenden Sie die Pakete `VectorFieldPlots` und `VectorAnalysis`. Die Funktion `ContourPlot[]` verlangt kartesische Komponenten. `VectorFieldPlot[]` verlangt einen zweidimensionalen Vektor. Mit dem Befehl `Show[plot1,plot2]` können Sie beide Plots übereinanderlegen.)

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung. • Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes. Sollte der Termin auf einen Feiertag fallen, dann verschiebt sich die Abgabe auf den nächsten Arbeitstag.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707 • Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627 • Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240 • Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060 • Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060