Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

4. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo. 22.05.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten im ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 10 (2 Punkte): *Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung*

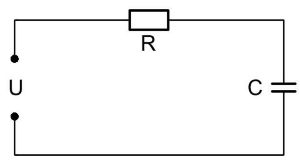
Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' = a(x)y + b(x)$ kann durch Variation der Konstanten gelöst werden. Die allgemeine Form wurde in der Vorlesung hergeleitet:

$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \left[C + \int b(x) e^{-A(x)} \, \mathrm{d}x \right], \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Hierbei ist $A(x) = \int a(x) \, \mathrm{d}x$ eine beliebige Stammfunktion und $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante, die durch die Anfangsbedingung festgelegt wird.
Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Lösung (Glg. 1) die obige Differentialgleichung erfüllt.

Aufgabe 11 (18 Punkte): *Elektrischer Schaltkreis*

Wir betrachten einen elektrischen Schaltkreis, der aus einem Widerstand und einem Kondensator besteht (siehe Abbildung). Die Spannungsquelle habe die allgemeine (zeitabhängige) Form $U \equiv U(t)$. Es wird außerdem vorausgesetzt, dass über dem Widerstand die Spannung $U_R(t) = RI(t)$ und über dem Kondensator die Spannung $U_C(t) = Q(t)/C$ abfallen, wobei R den Widerstand und C die Kapazität darstellen.



RC - Schaltkreis

Stellen Sie nun eine Differentialgleichung für die Ladung $Q(t)$ auf, indem Sie das 2. Kirchhoff'schen Gesetz (Maschenregel) und die Definition $I = \dot{Q}$ verwenden. (2 Punkte)

Entladevorgang

Als Spezialfall betrachten wir zunächst den Entladevorgang, bei dem keine Spannung angelegt ist ($U(t) \equiv 0$) und der Kondensator zu Beginn geladen sei ($Q(t=0) = Q_0$). Charakterisieren und lösen Sie die vereinfachte Differentialgleichung. (3 Punkte)

Aufladevorgang

Beim Aufladen wird eine konstante Spannung $U(t) \equiv U_0$ angenommen und als Anfangsbedingung gelte $Q(t=0) = 0$. Charakterisieren und lösen Sie die resultierende Differentialgleichung. (4 Punkte)

Zeitabhängige Spannungsquelle

Zum Schluss betrachten wir eine zeitabhängige Spannungsquelle, die eine Kosinus-Schwingung erzeugt. Der Generator wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet, wobei der Kondensator vollständig entladen ist. Zum Zeitpunkt $t = T$ wird die Spannungsquelle wieder ausgeschaltet:

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \cdot \cos(\omega t), & \text{für } 0 < t < T \\ 0, & \text{für } t \geq T \end{cases} .$$

Lösen Sie die Differentialgleichung, indem Sie die zwei Fälle $t < T$ und $t \geq T$ separat betrachten. Verwenden Sie dabei das Integral:

$$\int_0^t e^{\frac{t'}{RC}} \cos(\omega t')\, \mathrm{d}t' = \frac{1}{(RC)^{-2} + \omega^2} \left\{ -\frac{1}{RC} + e^{\frac{t}{RC}} \cdot \left[\frac{1}{RC} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \right] \right\}$$

Skizzieren Sie anschließend den Verlauf von $Q(t)$ und untersuchen Sie den Grenzfall $1/(RC) \ll t < T$ qualitativ. (9 Punkte)

Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung.
	• Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707
	• Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627
	• Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240
	• Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060
	• Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060
	• Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060
	• Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060