Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

5. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo. 29.05.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten im ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 12 (5 Punkte): *Lineare Differentialgleichungen (DGL)* **(1+2+2=5 Punkte)**

(a) Lösen Sie die DGL $y'' + y' - 6y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$.

(b) Geben Sie die Lösung der DGL $y'' + 4y = x^2$ an. Raten Sie dazu einen Ansatz für die partikuläre Lösung.

(c) Lösen Sie die DGL $\ddot{x} = -\omega(x - a)$ mit den Anfangsbedingungen $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = l$. Tipp: Führen Sie durch eine geschickte Substitution das Problem auf ein bekanntes Problem zurück.

Hinweis: $y' = \frac{dy}{dx}$ und $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Aufgabe 13 (8 Punkte): *Allgemeine Lösung einer DGL 2. Ordnung* **(2+2+2+2=8 Punkte)**
Eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten hat inklusive Anfangsbedingungen die Form

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0 \quad &\text{mit} \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0 \quad &\text{mit} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Wir betrachten den Ansatz

$$x(t) = b_1 e^{\gamma_1 t} + b_2 e^{\gamma_2 t} \quad \text{mit} \quad \gamma_1, \gamma_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}.$$

Bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich, wie γ_1 und γ_2 von a_1 und a_0 abhängen. Wie hängen b_1 und b_2 von x_0 und y_0 ab?

b) Falls wir uns nur für reelle Lösungen interessieren, könnnen wir auch mit dem Ansatz

$$x(t) = e^{\gamma t}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] \quad \text{mit} \quad \gamma, \omega, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

starten. Bestimmen Sie durch geschickten Koeffizientenvergleich γ und ω. Wie hängen c_1 und c_2 von den Anfangsbedingungen ab?

c) Für reelle Lösungen können wir genausogut auch den Ansatz

$$x(t) = Ae^{\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \gamma, \omega, \varphi_0, A \in \mathbb{R}$$

verwenden. Bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich γ und ω. Wie sieht die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aus?

d) Falls sich die Differentialgleichung auf die Form

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^2 x(t) = 0$$

bringen lässt, funktionieren die bisher besprochenen Ansätze nicht. Wir benötigen stattdessen den neuen Ansatz

$$x(t) = (A + Bt)e^{\nu t} \quad \text{mit} \quad A, B, \nu \in \mathbb{C}.$$

Bestimme die Parameter.

Bitte Rückseite beachten! $\longrightarrow$

Aufgabe 14 (7 Punkte): *Schwingkreis* **(1+3+2+1=7 Punkte)**
Ein elektrischer Schwingkreis mit angelegter Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ lässt sich durch die folgende DGL beschreiben:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U} = U_0 \omega \cos(\omega t),$$

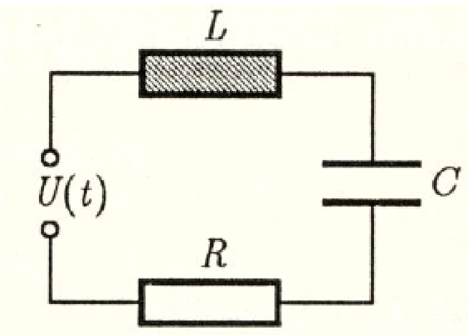
wobei $I(t)$ der Strom, R der Widerstand, C die Kapazität des Kondensators und L die Induktivität der Spule ist. U_o und ω sind die Amplitude und die Frequenz der angelegten Wechselspannung.

(a) Lösen Sie die homogene Gleichung.

(b) Finden Sie nun eine partikuläre Lösung. Wie lautet die Gesamtlösung? Tipp: Betrachten Sie das System im Komplexen: Berechnen Sie also erstmal die Lösung der DGL $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = U_0 \omega \exp(i\omega t)$. Als Ansatz empfiehlt sich $A \exp(i\omega t)$, wobei A komplex ist. Sie erhalten also die partikuläre Lösung, indem Sie Betrag und Phase von A bestimmen. Der Realteil dieser Lösung ist dann die Lösung unserer ursprünglichen DGL. Warum ist dieses Vorgehen legitim, also warum vermischen sich Real- und Imaginärteile nicht?

(c) Zeichnen Sie $|A|$ in Abhängigkeit von ω für verschiedene R-Werte. Nehmen Sie $U_0 = L = C = 1$ an.

(d) Für $R = 0$ ist eine Resonanzkatastrophe zu beobachten, d.h. die Amplitude wird für eine bestimmte Frequenz ω_0 unendlich groß. Bestimmen Sie den Wert von ω_o.



Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung. • Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707 • Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627 • Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240 • Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060 • Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060