Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 31. Mai 2017

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

6. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Di. 06.06.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten (Einführung) im ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 15 (6 Punkte): *Fall mit Reibung*

In Aufgabe 9 haben wir den Abwärtssprung eines Menschen mit Stokesscher Reibung betrachtet. Wir sind jetzt in der Lage, anstatt einer Differentialgleichung erster Ordnung für die Geschwindigkeit, nämlich $m\dot{v}(t) = -mg - 6\pi r\eta v$, die entsprechende Differentialgleichung zweiter Ordnung für die zurückgelegte Strecke $x(t)$ zu lösen. Machen Sie zuerst eine kleine Skizze in der Sie die x-Achse mit den wirkenden Kräften einzeichnen - Welches Vorzeichen erwarten Sie für die Geschwindigkeit? Lösen Sie dann die inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ und $x(0) = 0$. Die resultierende Position des Menschen ist eine streng monotone Funktion der Zeit. Was müssen wir an der Differentialgleichung für x ändern, damit Oszillationen möglich werden? Was wäre eine entsprechende physikalische Realisation?

Aufgabe 16 (6 Punkte): *Vermehrung von Fruchtfliegen*
Um 1920 stellte R. Pearl fest, dass die Änderungsrate $\dot{u}$ einer Population der Fruchtfliegen *Drosophila* mit der Populationsgröße $u(t)$ über die *nichtlineare* Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= k_1 u(t) - k_2 u(t)^2 \quad (\text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+)\\ u(0) &= u_0 < k_1/k_2\end{aligned}$$

zusammenhängt $(k_1, k_2 = const.)$.

(a) Verwenden Sie zunächst die Transformation $u = \frac{1}{x}$, um die Gleichung in eine *lineare* Differentialgleichung 1. Ordnung zu überführen.

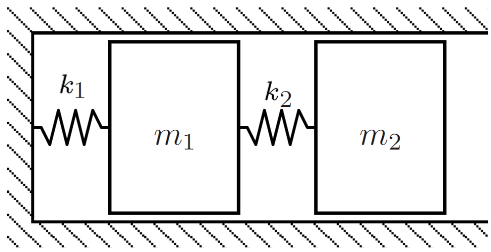
(b) Bestimmen Sie die zeitliche Lösung $u(t)$ der Gleichung und skizzieren Sie das Ergebnis.

(c) Zeigen Sie, dass die Population gegen eine Gleichgewichtsgröße u_∞ strebt.

(d) Wie kann die nichtlineare Differentialgleichung für kleine Populationsgrößen $(u \ll u_\infty)$ abgeschätzt werden? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 17 (8 Punkte): *Gekoppelte Schwingungen*
Skizziert ist ein System aus zwei schwingenden Massen. Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2\\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2 x_1 - k_2 x_2\end{aligned}$$



Dies ist ein gekoppeltes System linearer homogener Differentialgleichungen.

(a) Leiten Sie das gekoppelte Differentialgleichungssystem her. Verwenden Sie dazu, dass die Feder eine rückstellende Kraft erzeugt, die proportional zur Auslenkung aus der Ruheposition ist. Für einen Körper mit der Masse m, der mit einer Feder verbunden ist, ergibt sich damit die folgende Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -kx$.

(b) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in Matrixform $\ddot{\underline{x}} = \mathbf{M}\underline{x}$ mit $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$. Verwenden Sie $k_1 = 2k$, $k_2 = k$ und $m_1 = m_2 = m$.

(c) Zeigen Sie, dass Sie mit dem Ansatz $x_i = c_i e^{i\omega t}$ ein Eigenwertproblem der Form $\mathbf{M}\underline{c} = \lambda\underline{c}$ erhalten, wobei λ eine Konstante darstellt und $\underline{c} = (c_1, c_2)^T$ einen Vektor aus Koeffizienten.

(d) Das lineare Gleichungssystem besitzt genau dann eine Lösung, wenn die Determinante $|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{1}|$ verschwindet, wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix darstellt. Bestimmen Sie aus dieser Bedingung die Eigenfrequenzen ω des Systems - Wie ändern sich die Eigenfrequenzen, wenn die Masse oder die Federkonstante verdoppelt wird?

(e) Ändern Sie die Bewegungsgleichungen nun für den Fall, dass die Massen einer (Stokesschen) Reibung unterliegen? Beschreiben Sie die neue Dynamik qualitativ. Stellen Sie sich dazu vor, dass die Massen in Honig getaucht werden.

Hinweis: Die Determinante einer 2×2 Matrix berechnet sich durch:

$$|\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3$$

Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung. • Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes. Sollte der Termin auf einen Feiertag fallen, dann verschiebt sich die Abgabe auf den nächsten Arbeitstag.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707 • Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627 • Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240 • Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060 • Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060