Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

8. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo. 19.06.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten im ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 21 (3 Punkte): *Inhomogene, lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung*

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung $\underline{y}'(x) = \underline{\underline{A}}(x)\underline{y}(x) + \underline{b}(x)$ kann durch die Gleichung (1) ausgedrückt werden:

$$\underline{y}(x) = \underline{\underline{Y}}(x)\left[\underline{c} + \int_{x_0}^{x} \underline{\underline{Y}}^{-1}(x')\underline{b}(x')\,\mathrm{d}x'\right]. \tag{1}$$

Beachten Sie dabei, dass $\underline{\underline{A}}(x)$ eine $n \times n$ Matrix ist und die Koeffizienten von x abhängen können. Damit ist die Glg. (1) eine Verallgemeinerung der Lösung, die in der Vorlesung besprochen wurde. Hierbei wurde die sogenannte *Fundamentalmatrix* $\underline{\underline{Y}}(x)$ verwendet, deren Spalten aus den Lösungsvektoren des homogenen Differentialgleichungssystems gegeben sind:

$$\underline{\underline{Y}}(x) = \left[\underline{y}_1, \underline{y}_2, ..., \underline{y}_n\right]$$
$$\underline{y}_i'(x) = \underline{\underline{A}}(x)\underline{y}_i(x) \quad ,\forall i \in \{1, 2, .., n\}$$

Analog zum eindimensionalen Fall, kann Glg. (1) über *Variation der Konstanten* hergeleitet werden. In dieser Aufgabe soll stattdessen durch **Einsetzen** in das Differentialgleichungssystem gezeigt werden, dass die gesuchte Funktion durch die Glg. (1) gegeben ist. Bestimmen Sie zusätzlich, den Vektor $\underline{c}$, wenn die Anfangsbedingung $\underline{y}(x) = \underline{y}_0$ bekannt ist.

Aufgabe 22 (5 Punkte): *Inhomogene Differentialgleichungssysteme - ein Beispiel*
Lösen Sie das folgendes Differentialgleichungssystem (ohne Anfangsbedingungen):

$$\underline{y}'(x) = \begin{pmatrix} -2x^{-1} & x^{-1} \\ 3x^{-1} & 0 \end{pmatrix} \underline{y}(x) + \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestätigen Sie dazu als erstes die Fundamentallösung:

$$\underline{\underline{Y}}(x) = \begin{pmatrix} x^{-3} & x \\ -x^{-3} & 3x \end{pmatrix}$$

und notieren Sie damit die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

(b) Bestimmen Sie nun die Lösung des inhomogenen Systems indem Sie die Glg. 1 verwenden. Nutzen Sie außerdem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23 (7 Punkte): *Bestimmen von Fourierkoeffizienten*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[-L, L]$ integrierbar und $2L$-periodisch, dh. es gelte $f(x) = f(x + 2L)$. Dann sind die reellen Fourierkoeffizienten a_n , b_n bzw. die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von f definiert als:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}t$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-\frac{in\pi}{L}x}\mathrm{d}t$$

Bestimmen Sie jeweils die reellen und komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion:

(a) $f(x) = 9\cos(3x) + \sin(7x) - 10\sin(100x)$ und

(b) $f(x) = \cos^2(x)$.

(c) Zeigen Sie außerdem, dass die Fourierkoeffizienten von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x\frac{L}{\pi})$ gerade die Fourierkoeffizienten von f sind.

Aufgabe 24 (5 Punkte): *Partielle Differentialgleichungen*
Lösen Sie die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},$$

mit der Anfangsbedingung $u(0,x) = 10$ und den Randbedingungen $u(t,0) = 0$ $u(t,3) = 0$. *Hinweis*: Verwenden Sie den in der Vorlesung behandelten Separationsansatz und die Orthogonalität der Sinus-Funktion.

Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung. • Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes. Sollte der Termin auf einen Feiertag fallen, dann verschiebt sich die Abgabe auf den nächsten Arbeitstag.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707 • Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627 • Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240 • Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060 • Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060