

Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Mo. 08.05.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 4 (20 Punkte): Potential-Streuung

Wir betrachten ein stückweise stetiges Potential $V(x)$ und die Lösungen der Schrödingergleichung in den jeweiligen Intervallen,

$$V(x) = \begin{cases} V_1, \\ V_2, \\ \dots \\ V_N \\ V_{N+1} \end{cases} \quad \dots \quad \psi(x) = \begin{cases} a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}, & -\infty < x \leq x_1 \\ a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots & \dots \\ a_N e^{ik_N x} + b_N e^{-ik_N x}, & x_{N-1} < x \leq x_N \\ a_{N+1} e^{ik_{N+1} x} + b_{N+1} e^{-ik_{N+1} x}, & x_N < x < \infty \end{cases},$$

wobei

$$k_j = \sqrt{(2m/\hbar^2)(E - V_j)}.$$

Wir betrachten den Fall $E > V_1, V_{N+1}$, so dass k_1 und k_{N+1} reelle Wellenvektoren sind und $\psi(x)$ laufende, ebene Wellen außerhalb des Streugebiets $[x_1, x_N]$ beschreiben.

Wir wollen nun Lösungen der Schrödingergleichung unter der **Streubedingung** $b_{N+1} = 0$ bestimmen, d.h. wir suchen Lösungen, die auf der rechten Seite des Streugebiets nach rechts laufen, aber keinen Anteil aufweisen, der von rechts einläuft.

- Benutzen Sie die Stetigkeit von $\psi(x)$ und seiner Ableitung $\psi'(x)$ und zeigen Sie, dass sich zwei Gleichungen ergeben, die sich in der Matrix-Form

$$\mathbf{u}_1 = T^1 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

mit

$$T^1 = \frac{1}{2k_1} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)e^{i(k_2 - k_1)x_1} & (k_1 - k_2)e^{-i(k_1 + k_2)x_1} \\ (k_1 - k_2)e^{i(k_2 + k_1)x_1} & (k_1 + k_2)e^{-i(k_2 - k_1)x_1} \end{pmatrix}$$

schreiben lassen.

- Zeigen Sie, dass sich die Wellenfunktion auf der linken Seite mit der auf der rechten Seite des Streugebiets mit Hilfe der **Transfer-Matrix** M verbinden lässt, wobei

$$\mathbf{u}_1 = M \mathbf{u}_{N+1}, \quad M = T^1 T^2 \dots T^N$$

und die T^i sowie \mathbf{u}_{N+1} analog zu oben zu definieren sind.

- Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(x, t) = 0$$

und die Stromdichte

$$\mathbf{j}(x, t) = \frac{\hbar}{2im} [\psi^*(x, t) \nabla \psi(x, t) - \psi(x, t) \nabla \psi^*(x, t)]$$

2. Übung SoSe17

und zeigen Sie

$$j(x > x_N) = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(ik_{N+1}|a_{N+1}|^2) = |a_{N+1}|^2 \frac{\hbar k_{N+1}}{m}$$
$$j(x < x_1) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[(a_1^* e^{-ik_1 x} + b_1^* e^{ik_1 x}) ik_1 (a_1 e^{ik_1 x} - b_1 e^{-ik_1 x}) \right] = \frac{\hbar k_1}{m} [|a_1|^2 - |b_1|^2].$$

Die Stromdichte $j(x > x_N)$ beschreibt eine Fluß rechts vom Streugebiet nach $x \rightarrow \infty$. Auf der anderen Seite ist $j(x < x_1)$ auf der linken Seite die Differenz eines einfließenden, positiven Stroms (einfallende Teilchen) und eines ausfließenden, negativen Stroms (reflektierte Teilchen).

4. Der **Transmissions-Koeffizient** T und der **Reflexions-Koeffizient** R sind definiert als das Verhältnis vom Strom der transmittierten bzw. reflektierten Welle zum Strom der einfließenden Welle

$$T := \frac{k_{N+1}}{k_1} \left| \frac{a_{N+1}}{a_1} \right|^2, \quad R := \left| \frac{b_1}{a_1} \right|^2.$$

Zeigen Sie damit, dass

$$T = \frac{k_{N+1}}{k_1} \frac{1}{|M_{11}|^2}, \quad R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2$$

und $T + R = 1$

gilt, wobei M_{ij} die Einträge der Transfer-Matrix M sind.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.• Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	<ul style="list-style-type: none">• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte.• Bestandene Klausur.
Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.	