Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 04.05.2017

Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Mo. 15.05.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Endlich tiefer Potenzialtopf*

Gegeben sei ein Potential $U(x)$ durch

$$U(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -a < x < a \\ U_0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier sollen nur gebundene Zustände betrachtet werden, d.h. $0 < E < U_0$. Bitte verwenden Sie die folgenden Abkürzungen:

$$\kappa^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \,.$$

(a) Lösen Sie für diesen Fall die stationäre Schrödinger-Gleichung durch geeignete Ansätze für die drei Bereiche des Potentials. Benutzen Sie die Rand- und Stetigkeitsbedingungen und die sich aus der Normierung ergebene Bedingung zur Bestimmung der auftretenden Konstanten. Behandeln Sie dabei symmetrische und antisymmetrische Lösungen getrennt. Zeigen Sie, dass zur Bestimmung der Bindungsenergien die transzendenten Gleichungen

$$\kappa = k\tan(ka) \qquad \text{(symmetrische Lösung)} \tag{1a}$$

$$\kappa = -k\cot(ka) \qquad \text{(antisymmetrische Lösung)} \tag{1b}$$

zu erfüllen sind und geben Sie die (normierten) Wellenfunktionen an.

(b) Betrachten Sie den Grenzfall $U_0 \to \infty$. Zeigen Sie, dass die Gleichungen (1) dann die vom unendlich tiefen Potenzitaltopf bekannten Lösungen besitzt:

$$k = \frac{(2n-1)\pi}{2a} \qquad \text{(symmetrische Lösung)}$$

$$k = \frac{n\pi}{a} \qquad \text{(antisymmetrische Lösung)}$$

mit $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die Gleichungen (1) lassen sich analytisch nicht lösen, sondern müssen z.B. grafisch oder numerisch gelöst werden. Führen Sie dazu im Folgenden die normierten Energien

$$\widetilde{E} := \tfrac{2ma^2}{\hbar^2}E \qquad\qquad \widetilde{U}_0 := \tfrac{2ma^2}{\hbar^2}U_0$$

ein, und zeigen Sie, dass die Gleichungen (1) dann wie folgt umgeschrieben werden können:

$$\sqrt{\widetilde{U}_0 - \widetilde{E}} = \sqrt{\widetilde{E}}\tan(\sqrt{\widetilde{E}}) \qquad \text{(symmetrische Lösung)}$$

$$\sqrt{\widetilde{U}_0 - \widetilde{E}} = -\sqrt{\widetilde{E}}\cot(\sqrt{\widetilde{E}}) \qquad \text{(antisymmetrische Lösung)}$$

Bestimmen Sie für $\widetilde{U}_0 = 15$ die Energien aller gebundenen Zustände und skizzieren Sie die dazugehörigen Wellenfunktionen. *(Sie können die Wellenfunktionen auch mit einem Programm Ihrer Wahl exakt plotten, das gibt einen Extrapunkt!)*

3. Übung SoSe17

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Harmonischer Oszillator in der Quantenmechanik*

In der Vorlesung haben wir die stationäre Schrödinger-Gleichung für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens im parabolischen Potential mit dem Ansatz
$\psi(y) = c_n H(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dy^2} H_n(y) - 2y \frac{d}{dy} H_n(y) + 2n H_n(y) = 0 \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

transformiert und diese Gleichung dann mit einem Potenzreihenansatz gelöst.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Methode der vollständigen Induktion, dass die hermiteschen Polynome

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \tag{2}$$

Lösungen der linearen homogenen ODE 2. Ordnung sind.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Ergebnisse aus (a), dass $\frac{dH_n(y)}{dy} = 2n H_{n-1}(y)$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Normierungskonstanten c_n, um sich zu überzeugen, dass die normierten Wellenfunktionen für den harmonischen Oszillator

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \ b = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$$

lauten. Zeigen Sie dazu, dass gilt:

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \, [H_n(y)]^2 \, e^{-y^2} = \sqrt{\pi} 2^n n! \,.$$

Hinweis: Nutzen Sie dazu die in (b) abgeleitete Relation.

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite unter `www.tu-berlin.de/?qm17`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.