6.5 Harmonischer Oszillator in Besetzungszahldarstellung. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

- **Wiederholung**

klassische Mechanik:

Teilchen oszilliert harmonisch mit $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$,

Energie $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} = ... = \frac{m}{2}\omega^2 A^2$ zwischen $0 \le E < \infty$, kontinuierlich

Wellenmechanik (Kapitel 3): Ohne Rechnung ist klar

→ Da Potenzial U(x) zeitunabhängig, folgt für die Wellenfunktionen $\tilde{\psi}(x,t) = \psi(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.

→ Da $U(x) = U(-x)$ sind die $\psi(x)$ entweder gerade oder ungerade.

→ Da wir die gebundene, *eindimensionale* Bewegung behandeln, erwarten wir ein diskretes, *nichtentartetes* Energiespektrum E_n.

Mit Rechnung: In Kapitel 3 haben wir $\psi(x)$ und E_n mit der Sommerfeld´schen Polynom-methode aus der stationären Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

in (wie wir jetzt wissen) Ortsdarstellung bestimmt.

Vorgehensweise: Nach Variablentransformation $y = \frac{x}{b}$, $b := \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$

(i) Asymptote abspalten, Potenzreihenansatz für den "Rest", Rekursionsformel

$$\overbrace{\psi(y) = f(y)\,e^{-\frac{y^2}{2}}}^{\uparrow} \quad , \quad \overbrace{f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^k}^{\uparrow} \quad , \quad \overbrace{a_{k+2} = \frac{2k+1-\alpha}{(k+1)(k+2)}a_k}^{\uparrow} .$$

(ii) Normierbarkeit sichern

$$\alpha = 2n+1,\ n = 0,1,2,\ldots \text{ sowie } \begin{cases} a_1 = 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ a_0 = 0, & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{ergibt}$$

(iii) $E \to E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0,1,2,\ldots$

ein äquidistantes, nichtentartetes Energiespektrum mit den dazugehörigen Eigenzuständen

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right),$$

wobei $H_n(z) := (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$ die hermiteschen Polynome sind. Diese sind Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $\left(\frac{d^2}{dy^2} - 2y\frac{d}{dy} + 2n\right) H_n(y) = 0.$

(iv) für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte fanden wir im Grenzfall $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n(x)|^2 = w_{kl}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| < A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

- **Darstellungsunabhängige, algebraische Lösung des Eigenwertproblems für den Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators** (Dirac)

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \xrightarrow{\text{2. Postulat}} \hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \quad \text{mit } \underline{[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar}. \tag{6.23}$$

Dirac definierte eine Operator $\hat{a}$ und seinen adjungierten $\hat{a}^+$ entsprechend

$$\text{Def.:} \quad \begin{aligned} \hat{a} &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x \\ \hat{a}^+ &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^+ + \hat{a}\right) \\ \hat{p}_x &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right) \end{aligned}. \tag{6.24}$$

Offensichtlich sind <u>weder</u> $\hat{a}$ <u>noch</u> $\hat{a}^+$ <u>selbstadjungiert</u>. Sie genügen der Vertauschungsrelation

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] = 1, \ \text{bzw. } \hat{a}\hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+\hat{a} \tag{6.25}$$

denn

$$\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x\right] = -\frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}_x]}_{i\hbar} + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{x}]}_{-i\hbar} = \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar + i\hbar) = 1 .$$

Wegen $\quad \hat{a}^+\hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}_x^2 + \frac{i}{2\hbar}\underbrace{\left(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}\right)}_{i\hbar} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_x^2}{2m}\right) - \frac{1}{2}$ $\quad$ folgt

$$\underline{\hat{H}} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \underline{\hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}. \tag{6.26}$$

Damit ist das Eigenwertproblem für den Hamilton-Operator $\hat{H}$ auf das des Operators $\underline{\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}}$ zurückgeführt.

Wir bezeichnen die Eigenfunktionen des Operators $\hat{N}$ mit $|n\rangle$, die entsprechenden Eigenwerte mit n und betrachten die Eigenwertgleichung

Def.: $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$, mit $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$. **(6.27)**

Wir wollen nun zeigen, dass $n = 0,1,2,3,...$ ist.

Zur Berechnung der Eigenwerte von $\hat{N}$ halten wir fest:

(i) Der Operator $\hat{N}$ ist hermitesch, denn $\hat{N}^+ = (\hat{a}^+\hat{a})^+ = \hat{a}^+\hat{a}^{++} = \hat{a}^+\hat{a} = \hat{N}$.
Also sind die Eigenwerte n reelle Zahlen und die Eigenfunktionen $|n\rangle$ bilden eine Basis $\{|n\rangle\}$ im Hilbert-Raum H.

(ii) Die EW von $\hat{N}$ sind nicht negativ, denn es gilt $n = \langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \langle \hat{a}\,n|\hat{a}\,n\rangle \geq 0$.
Damit ist das Spektrum von $\hat{N}$ nach unten beschränkt.

(iii) Es gilt $\hat{N}\,(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)\,(\hat{a}|n\rangle)$.
Beweis: $\hat{N}\hat{a}|n\rangle$

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}^+\hat{a})\hat{a}|n\rangle \overset{(6.25)}{=} (\hat{a}\hat{a}^+ - 1)\hat{a}|n\rangle = \hat{a}(\hat{a}^+\hat{a} - 1)|n\rangle = \hat{a}\hat{N}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle \overset{(6.27)}{=} \hat{a}\,n|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\;(\hat{a}|n\rangle)$$

Wenn $|n\rangle$ Eigenfunktion von $\hat{N}$ zum Eigenwert n ist, dann ist $\hat{a}|n\rangle$ ebenfalls Eigenfunktion von $\hat{N}$, allerdings zum Eigenwert (n-1).

Wegen (6.27) gilt $\hat{N}|n-1\rangle = (n-1)|n-1\rangle$. Da die Eigenwerte von $\hat{N}$ (wie die von $\hat{H}$) nicht entartet sind, können sich die Zustände $\hat{a}|n\rangle$ und $|n-1\rangle$ nur um eine Konstante unterscheiden.

Deshalb muss $\hat{a}|n\rangle = \text{const}|n-1\rangle$ gelten.
Im Gegensatz zu $|n\rangle$ ist $\hat{a}|n\rangle$ noch nicht normiert. Wir finden
$\langle \hat{a}\,n|\hat{a}\,n\rangle = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{N}|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n$, und damit schließlich

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad \textbf{(6.28)}$$

(iv) Analog beweisen wir die Gültigkeit der Relationen

$$\hat{N}\,(\hat{a}^+|n\rangle) = (n+1)\,(\hat{a}^+|n\rangle)\ ,\ \ \underline{\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}\ . \tag{6.29}$$

$$\hat{N}\,\hat{a}^+|n\rangle = \hat{a}^+(\hat{a}\,\hat{a}^+)|n\rangle \overset{(6.25)}{=} \hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a}+1)|n\rangle = \hat{a}^+\hat{N}|n\rangle + \hat{a}^+|n\rangle = \hat{a}^+ n|n\rangle + \hat{a}^+|n\rangle = (n+1)(\hat{a}^+|n\rangle)\,.$$

Also $\hat{a}^+|n\rangle = \mathrm{const}\,|n+1\rangle$.

Normierung: $\left|\hat{a}^+|n\rangle\right|^2 = \langle\hat{a}^+n|\hat{a}^+n\rangle = \langle n|\hat{a}\,\hat{a}^+|n\rangle = \langle n|1+\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = (1+n)\langle n|n\rangle = 1+n\,.$

Also: Ist $|n\rangle$ Eigenfunktion von $\hat{N}$ zum Eigenwert n, dann ist $\hat{a}^+|n\rangle$ Eigenfunktion von $\hat{N}$ zum Eigenwert n + 1.

Aus (6.28/29) folgt z.B.

$(\hat{a}^+)^2|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2}\ |n+2\rangle$ oder $(\hat{a})^3|n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}\ |n-3\rangle$ usw.

(v) Bei wiederholter Anwendung von $\hat{a}$ auf $|n\rangle$ könnten im Widerspruch zu **(ii)** negative Eigenwerte auftreten. Um das zu verhindern, muss ein Grundzustand, $|0\rangle$, mit Def.: $\hat{a}|0\rangle = 0$ existieren. Wegen $\hat{N}|0\rangle = \hat{a}^+\hat{a}|0\rangle = \hat{a}^+\,0 = 0$ ist der Eigenwert von $\hat{N}$ zum Grundzustand $|0\rangle$ gleich Null. Also ist das Spektrum von $\hat{N}$ nach unten beschränkt.

(vi) Nach oben ist das Spektrum von $\hat{N}$ dagegen unbeschränkt.

Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an. Sei n_{max} der größte Eigenwert von $\hat{N}$, d.h. $\hat{a}^+|n_{max}\rangle = 0$. Dann wäre

$$0 = \left|\hat{a}^+|n_{max}\rangle\right|^2 = \langle\hat{a}^+n_{max}|\hat{a}^+n_{max}\rangle = \langle n_{max}|\hat{a}\,\hat{a}^+|n_{max}\rangle \overset{(6.25/27)}{=} \langle n_{max}|(\hat{N}+1)|n_{max}\rangle = n_{max}+1\ ,$$

also n_{max} im Widerspruch zu (ii) negativ.

Bemerkung: Es existieren keine Eigenfunktionen $|n\rangle$ von $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ mit Eigenwerten n, die keine natürlichen Zahlen sind. Die Annahme $\hat{N}|n\rangle = (n+x)|n\rangle$, $0 < x < 1$ führt zum Widerspruch (vgl., z.B., Nolting, Band 3, S. 280).

Fazit aus den Eigenschaften (i) – (vi): Die Eigenwerte des Operators $\hat{N}$ sind n = 0, 1, 2, … .

Wegen $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ (6.26), ergibt sich daraus sofort

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2... \quad , \tag{6.30}$$

also das uns aus Kapitel 3 bekannte Energiespektrum des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit seinen diskreten, äquidistanten und nicht entarteten Energieniveaus.

Wir wollen unsere Ergebnisse nun folgendermaßen **interpretieren**: Der n-te angeregte Zustand $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators ist mit n Schwingungsquanten der Energie $\hbar\omega$ besetzt. Wir nennen

(i) $\hat{N}$ gemäß $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ den **Besetzungszahloperator**. Das ist der Operator zur Observable Anzahl der Schwingungsquanten im Zustand $|n\rangle$.

(ii) $\hat{a}$ gemäß $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ den **Vernichtungsoperator**. Die Anwendung von $\hat{a}$ auf den Zustand $|n\rangle$ vernichtet ein Schwingungsquant.

(iii) $\hat{a}^{+}$ gemäß $\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ den **Erzeugungsoperator**. Die Anwendung von $\hat{a}^{+}$ auf den Zustand $|n\rangle$ erzeugt ein Schwingungsquant.

Naheliegender Weise nennen wir dann die Darstellung zur Basis $\{|n\rangle\}$ der Eigenfunktionen von $\hat{N}$ die Besetzungszahldarstellung der Quantenmechanik.

Bemerkung: Offensichtlich lassen sich die Operatoren von Observablen, die nach dem Korrespondenzprinzip $Q(\underline{p},\underline{r}) \to \hat{Q} = Q(\hat{\underline{p}},\hat{\underline{r}})$ aus den entsprechenden Phasenraumvariablen gebildet werden können, durch die Operatoren $\hat{a}^{+}$ und $\hat{a}$ ausdrücken (6.24, rechts). Die Darstellung aller Operatoren von Observablen durch Kombinationen aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren wird als zweite Quantisierung bezeichnet. Sie ist von grundlegender Bedeutung für die quantenmechanische Beschreibung von Vielteilchensystemen und wird ausführlich im Kurs ThPh V, QM II behandelt.

- **Eigenfunktionen von $\hat{H}$**

$\hat{H}$ und $\hat{N}$ haben gemeinsame Eigenfunktionen. Sie lassen sich durch aufeinanderfolgende Anwendung von $\hat{a}^+$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ gewinnen:

$$\hat{a}^+|0\rangle = \sqrt{1}|1\rangle,\ \hat{a}^+|1\rangle \rightarrow |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1}}\hat{a}^+|0\rangle,\ \hat{a}^+|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle,\ \hat{a}^+|1\rangle \rightarrow |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^+|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}(\hat{a}^+)^2|0\rangle$$

also $\quad \underline{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle,\ n = 0,1,2,...}$ **(6.31)**

In <u>Ortsdarstellung</u> erhalten wir die Ergebnisse aus Kapitel 3.

<u>Grundzustand</u>: Wir projezieren $\hat{a}|0\rangle$ auf $|x\rangle$ und finden mit (6.24) die Differentialgleichung

$$0 = \langle x|\hat{a}|0\rangle = \langle x|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}_x|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\underbrace{\langle x|\hat{x}|0\rangle}_{x\langle x|0\rangle = x\psi_0(x)} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\underbrace{\langle x|\hat{p}_x|0\rangle}_{-i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|0\rangle = -i\hbar\frac{d\psi_0(x)}{dx}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x\,\psi_0(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d\psi_0(x)}{dx} = 0\ .$$

Über Trennung der Variablen, $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\,dx = \frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,dx$ und Normierung folgt

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\ . \qquad \textbf{(6.32)}$$

Einschub: <u>Angeregte Zustände</u> (→ Übungsblatt)

Sukzessive erzeugen wir aus $\psi_0(x)$ die Wellenfunktionen der angeregten Zustände, z.B.

$$\psi_1(x) = \langle x|1\rangle = \langle x|\hat{a}|0\rangle = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\right)\langle x|0\rangle = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\,\psi_0(x)$$

denn mit $\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,\psi_0$ (s.o.) ist $-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,x\frac{d\psi_0}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x\,\psi_0$

Bemerkung: Die Substitution $q := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$ mit $\frac{d}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{dq}$ in $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ vereinfacht die Ausdrücke erheblich, denn nun ist

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right)$$

also

$$\psi_n(q) := \langle q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle q|(\hat{a}^+)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \psi_0(q)\,. \qquad \textbf{(6.33)}$$

Zeigen Sie, dass daraus

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(q)\, e^{-\frac{q^2}{2}}, \quad n = 0,1,2,...$$

folgt, wobei $H_n(q) = (-1)^n\, e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2}$ die Hermite´schen Polynome vom Grad n sind.

Überzeugen Sie sich, dass $H_n(q)$ die Lösungen der linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung $\left(\frac{d^2}{dq^2} - 2q\frac{d}{dq} + 2n\right)H_n(q) = 0$ sind.

Fazit: Damit ist der Anschluss an die Ergebnisse vollzogen, die wir in Kapitel 3 bei der Behandlung des eindimensionalen harmonischen Oszillators nach der Sommerfeld´schen Polynommethode erzielt haben. Hier haben wir Energiespektrum und Eigenfunktionen ausschließlich unter Verwendung der Vertauschungsrelation zwischen Orts- und Impulsoperator $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ bestimmt.
Die verwendete Besetzungszahldarstellung mit den eingeführten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ist Grundlage der sogenannten II. Quantisierung, die im Kurs Quantenmechanik II (Masterstudium) ausführlich behandelt wird.

Einschub: Glauber-Zustände

1963 zeigte R. J. Glauber (geb. 1925, Nobel-Preis für die Entwicklung der Theorie der kohärenten Zustände in der Quantenoptik; R. J. Glauber, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963)), dass die elektromagnetische Welle einer Lasermode am besten durch → kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ gemäß

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in C \text{ komplex}$$

beschrieben werden kann. Diese kommen klassischen elektromagnetischen Wellen sehr nahe, weil der Erwartungswert der elektrischen Feldstärke im Zustand $|\alpha\rangle$ unabhängig vom Erwartungswert der Teilchenzahl die Form einer klassischen elektromagnetischn Welle hat. Ursprünglich entdeckte Erwin Schrödinger die kohärenten Zustände, als er nach einem Zustand des quantenmechanischen harmonischen Oszillators suchte, der weitestgehend dem klassischen harmonischen Oszillator entspricht. Vgl. *E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, Die Naturwissenschaften **14**, 664-666 (1926). Er zeigte, dass der kohärente Zustand im Fall des harmonischen Oszillators ein Gauß´sches Wellenpaket ist, dass im parabolischen Potenzial $U(x) = k/2\ x^2$ hin und herläuft, ohne dabei seine Orts- und Impulsunschärfe zu verändern (vgl. Animation in Wikipedia unter dem Stichwort → *kohärenter Zustand*.)

Die sogenannten kohärenten oder Glauber-Zustände $|\alpha\rangle$ haben interessante Eigenschaften, die die Bezeichnung quasi-klassische Zustände rechtfertigen (Beweise Übungsblatt):

(i) $\langle \Delta x \rangle_{|\alpha\rangle} \langle \Delta p_x \rangle_{|\alpha\rangle} \overset{!}{=} \frac{\hbar}{2}$ → "minimale Wellenpakete"

(ii) Für große Werte $|\alpha|$ sind die Unschärfen von $\hat{x}$, $\hat{p}_x$ und $\hat{H}$ sehr klein.

(iii) $\langle x \rangle_{|\alpha\rangle}$ und $\langle p_x \rangle_{|\alpha\rangle}$ genügen den klassischen Bewegungsgleichungen (oszillieren mit Frequenz ω), wohingegen $\langle x \rangle_{|n\rangle} = \langle p_x \rangle_{|n\rangle} = 0$.

Vorgehensweise zum Beweis von (i) – (iii) (u.U. als Übungsaufgabe):

1) Zeige, das $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ ein normierter Eigenzustand $|\alpha\rangle$ des Vernichtungs-operators $\hat{a}$ zum Eigenwert α ist.

2) Eigenzustände $|\alpha\rangle$ zu verschiedenen Eigenwerten α sind nicht orthogonal ($\hat{a}$ ist nichtnormal, da $[\hat{a}^+, \hat{a}] \neq 0$).

3) $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$.

Fazit: Kohärente Zustände schlagen die Brücke zur klassischen Physik harmonischer Oszillatoren. Besonders wichtig sind sie in der Quantenoptik.

■ Ein Fadenpendel mit $m = 1$ kg und $\ell = 10$ cm hat $|\alpha| \cong 10^{15}$.