Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 25.05.2017

Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Dienstag 06.06.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 12 (8 Punkte): *Messungen in der Quantenmechanik*
Ein quantenmechanisches System, welches durch drei Energieniveaus beschrieben werden kann, besitze den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in Matrixform und sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

präpariert. Hier ist $|\psi(t=0)\rangle$ in der Basis der Energieeigenzustände gegeben. Außerdem existiert eine Observable X, deren Operator in der Basis der Energieeigenzustände folgende Matrixdarstellung hat:

$$\hat{X} = \ell \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie die normierten Eigenzustände (Vektoren) und Eigenwerte des Hamilton-Operators und des Operators $\hat{X}$.

(b) Welche Messwerte sind bei einer Messung der Energie bzw. der Observablen X zur Zeit $t = 0$ möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten diese Messwerte auf?

(c) Zur Zeit $t = 0$ soll zunächst die Energie gemessen werden und sofort danach die Observable X. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man erst den Messwert 0 für die Energie und danach $\sqrt{3}\,\ell$ für die Observable X?

(d) In einem identischen Experiment soll zur Zeit $t = 0$ zunächst die Observable X und sofort danach die Energie gemessen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man erst den Messwert $\sqrt{3}\,\ell$ für die Observable X und danach 0 für die Energie? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabenteil (c).

(e) Welche Voraussetzung müssen zwei Operatoren erfüllen, damit die Reihenfolge der Messungen deren Ergebnis nicht beeinflusst? Überprüfen Sie explizit, ob die gegebenen Operatoren diese Voraussetzung erfüllen.

(f) Berechnen Sie den zeitabhängigen Zustand $|\psi(t)\rangle$, indem Sie die Schrödingergleichung lösen. Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle E\rangle(t)$ und der Observablen $\langle X\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{X}|\psi(t)\rangle$ in diesem Zustand.

Bitte Rückseite beachten!⟶

6. Übung SoSe17

Aufgabe 13 (9 Punkte): *Rechnen mit Operatoren*

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[F(\hat{x}), \hat{p}]$ und $[F(\hat{p}), \hat{x}]$. Dabei seien F Funktionen, die als Taylorreihen der jeweiligen Operatoren dargestellt werden können.

(b) Beweisen Sie die Jacobi-Identität für lineare, nicht kommutierende Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, und $\hat{C}$:

$$\left[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]\right] + \left[\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]\right] + \left[\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] = 0$$

Es seien nun $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei beschränkte Operatoren, für die $\big[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}\big] = \big[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}\big] = 0$ gilt. Zeigen Sie folgende Relationen unter Ausnutzung der Definition der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$.

(c) $\big[\hat{A}^n, \hat{B}\big] = n\big[\hat{A}, \hat{B}\big]\hat{A}^{n-1}$

(d) $\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B} = \big(\hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]\big)\mathrm{e}^{\hat{A}}$

(e) $\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$

(f) $\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{[\hat{A},\hat{B}]}$

Hinweis: Betrachten Sie in Teil (e) die Funktionen $f(t) = \mathrm{e}^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = \mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{t\hat{B}}\mathrm{e}^{-t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$. Zeigen Sie, dass diese Funktionen der gleichen linearen DGL zu gleichen Anfangswerten gehorchen (unter Ausnutzung von Teilaufgabe (d)). Analog für Punkt (f) mit den Funktionen $f(t) = \mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}$ und $g(t) = \mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{t\hat{A}}\mathrm{e}^{[t\hat{A},\hat{B}]}$.

Aufgabe 14 (3 Punkte): *Impulsdarstellung*

(a) Leiten Sie analog zur Vorlesung den Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ in der Impulsdarstellung her.

(b) Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung (mit Potential $U(\mathbf{r})$) in Impulsdarstellung dar, also für die Wellenfunktion $\phi(\mathbf{p}, t)$.

Hinweis: Fourier-transformieren Sie dazu die Schrödinger-Gleichung und integrieren Sie partiell.

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite unter `www.tu-berlin.de/?qm17`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.