Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 20.04.2017

Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

1. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Di. 02.05.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Fourierreihe*

In den mathematischen Methoden haben wir die lokale Approximation einer glatten Funktionen $f(x)$ in der Umgebung eines Punktes $x = x_0$ in Form der sog. Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)} x_0}{n!} (x - x_0)^n$$

behandelt.
Stückweise stetige periodische Funktionen $f(x) = f(x + 2L)$ lassen sich in eine Fourier-Reihe aus Sinus- und Kosinus-Funktionen entwickeln:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right).$$

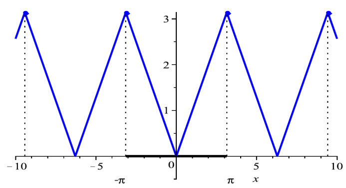
Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k lassen sich für eine Funktion der Periode $2L$ durch

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \, \mathrm{d}x$$

berechnen.

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe zu der Dreiecksschwingung $f(x)$:

$$f(x) = a|x| \quad \text{und } f(x + 2L) = f(x).$$



(b) Plotten Sie für $a = 1$ und $L = \pi$ mit einem Programm Ihrer Wahl (Mathematica, gnuplot...) die Fourierreihe bis zum (i) ersten, (ii) dritten und (iii) fünften Glied.
Der Ausgedruckte Code gehört zur Abgabe und wird bewertet!

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Fourier-Transformation*
Quadratisch integrierbare, nichtperiodische Funktionen können als Fourier-Integral oder Fourier-Transformation dargestellt werden. Die Definition der Fourier-Transformation ist:

$$\begin{aligned} g(k) &= \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \, , \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \, . \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Gaußverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, .$$

Die Fourier-Transformierte einer Gaußfunktion ist also wieder eine Gaußfunktion. In welchen Zusammenhang stehen die Varianzen σ^2 zueinander?
Hinweis: Benutzen Sie die quadratische Ergänzung, um die entsprechenden Integrale zu lösen.

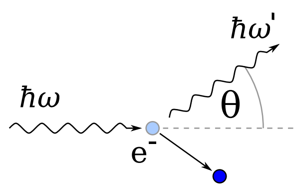
(b) Plotten Sie mithilfe von Mathematica oder einem anderen Programm Ihrer Wahl (z. B. `gnuplot, python...`) die Funktion $f(x)$ aus (a) sowie ihre Fourier-Transformierte $g(k)$ für den Erwartungswert $\mu = 0$ und die Varianz $\sigma^2 = 0.5$.

(c) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte der Ableitung einer Funktion gilt:

$$\mathcal{F}(f') = ik\mathcal{F}(f) \, .$$

$f(x)$ sei dabei eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die ebenso wie alle ihre Ableitungen für $|x| \to \infty$ schneller verschwindet als jede Potenz von x.

Aufgabe 3 (8 Punkte): *Compton-Steuung*
Bei der Streuung kurzwelliger Röntgenstrahlung an Elektronen erhält das gestreute Licht eine Komponente, deren Wellenlänge größer ist als die des einfallenden Lichts. Diese Wellenlängenänderung ist im Rahmen der Wellentheorie des Lichts (klassische Elektrodynamik) nicht erklärbar.



(a) Zeigen Sie zunächst, dass ein freies und ruhendes Elektron kein Photon absorbieren kann. Überprüfen Sie hierzu die Vereinbarkeit von (relativistischer) Energie- und Impulserhaltung.

(b) Prozesse, bei denen das Photon nicht absorbiert sondern gestreut wird, sind hingegen erlaubt. Berechnen Sie unter Verwendung der aus der Vorlesung SRT bekannten relativistischen Energie-Impuls-Beziehung die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda$, die ein Photon bei der Streuung an einem ruhenden Elektron erfährt. Der Streuwinkel sei durch Θ gegeben (siehe Skizze).

(c) Berechnen Sie die relative Wellenlängenänderung $\Delta\lambda/\lambda_0$ ($\theta = \pi/2$) für (i) sichtbares Licht ($\lambda_0 \approx 4000$Å), (ii) für Röntgenstrahlung ($\lambda_0 \approx 0{,}5$Å) und (iii) für γ-Strahlung ($\lambda_0 \approx 0{,}02$Å)

Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

Vorlesung:
- Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
- Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite mit Direktzugang: 176875

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.