Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 18.05.2017

Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

5. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Mo. 29.05.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 10 (8 Punkte): *Hermitesche (selbstadjungierte) Operatoren*

Ein Operator $\hat{A}^\dagger$ ist adjungiert zu $\hat{A}$ wenn

$$\langle \phi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \phi | \psi \rangle$$

für alle Zustände ψ, ϕ gilt. Ein Operator heißt hermitesch, wenn ferner $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ gilt.

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Operatoren hermitesch sind:

$$\hat{A}_1 = \hat{x}\hat{p}\ , \qquad \hat{A}_2 = \hat{p}\hat{x}\ , \qquad \hat{A}_3 = 1/2(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})\ , \qquad \hat{A}_4 = \hat{Q}^\dagger \hat{Q}.$$

$\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ sei der Impulsoperator. $\hat{Q}$ sei ein beliebiger Operator.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt

$$\langle [\hat{B}, \hat{A}] \rangle \quad = \quad \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle^*.$$

Dabei ist $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ der Kommutator.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 11 (12 Punkte): *Matrixdarstellung von Operatoren und Basiswechsel*
Betrachten Sie zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, deren Eigenvektoren $|a_n\rangle$, $|b_n\rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ jeweils vollständige, orthonormierte Eigensysteme bilden. Die dazugehörigen Eigenwerte seien gegeben durch $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ und seien nicht entartet. Es gilt also

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle \qquad \hat{B}|b_n\rangle = b_n|b_n\rangle\,. \tag{1}$$

Ein beliebiger Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich in der $\hat{A}$-Darstellung als Linearkombination der Eigenvektoren von $\hat{A}$ schreiben:

$$|\psi\rangle_A = \sum_n \alpha_n|a_n\rangle\,, \tag{2}$$

mit Koeffizienten $\alpha_n = \langle a_n|\psi\rangle$.

(a) Geben Sie $|\psi\rangle$ in der $\hat{B}$-Darstellung an. Berechnen Sie dazu die Koeffizienten $\beta_n = \langle b_n|\psi\rangle$ als Funktion der Koeffizienten α_n und der Basisvektoren $|a_n\rangle$, $|b_n\rangle$.

(b) Welche Form hat der Operator $\hat{A}$ in der $\hat{A}$- und in der $\hat{B}$-Darstellung, d.h. wie sieht der Vektor $\hat{A}|\psi\rangle$ in der jeweiligen Darstellung aus, wenn $|\psi\rangle$ in eben dieser Darstellung gegeben ist?

(c) Seien nun $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ die Eigenwerte $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ besitzt.
- Berechnen Sie $\psi_A = \begin{pmatrix} \langle a_1|\psi\rangle \\ \langle a_2|\psi\rangle \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_A$ in der $\hat{B}$-Darstellung .
- Berechnen Sie $\hat{A}$ in der $\hat{A}$- und in der $\hat{B}$-Darstellung.

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite unter `www.tu-berlin.de/?qm17`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.