Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Johannes Blaschke (Sprechstunde: Fr 10:00-11:00 in EW 708)

4. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 22.05.2017 im Tutorium (10:15, EW 731)

M **Aufgabe 11**: *Spannungstensor einer Newtonschen Flüssigkeit*

Der Spannungstensor $\mathbf{T}$ einer Newonschen Flüssigkeit ist gegeben durch $\mathbf{T} = \mathbf{T}^0 + \mathbf{T}'$, wobei der statische Anteil durch $\mathbf{T}^0 = -p\mathbf{1}$ mit dem Druck p gegeben ist und der dissipative Anteil durch $\mathbf{T}' = 2\eta\mathbf{A} + \eta'\mathbf{1}\mathrm{Sp}\mathbf{A}$ mit den Viskositäten η und η' und der Deformationsrate $\mathbf{A}$.

(a) Zerlegen Sie $\mathbf{T}'$ in einen spurlosen Anteil und einen Anteil mit nichtverschwindender Spur und zeigen Sie, dass:

$$\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3}\eta \geq 0\,. \tag{3.58}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} + (\eta + \eta')\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})\,. \tag{3.61}$$

M **Aufgabe 12**: *Thermodynamik isotroper Flüssigkeiten*

Für kanonische Ensembles wird die freie Energie F (als Funktion der Temperatur T, Teilchenanzahl N und Volumen V) als thermodynamisches Potential verwendet. Die spezifische freie Energie f ist dann definiert über $F = \int \rho f d^3x$ mit der Massendichte ρ.

(a) Zeigen Sie, dass für den Druck p gilt:

$$p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}\,. \tag{3.39}$$

Berechnen Sie die spezifische Entropie s.

(b) Zeigen Sie, dass für die spezifische innere Energie u in Abhängigkeit von T und ρ gilt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_T = \frac{p}{\rho^2} + T\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T\,. \tag{3.100}$$

Beachten Sie, dass die innere Energie U normalerweise als Funktion von S, V und N gegeben ist. Zeigen Sie ferner, dass folgende Maxwell-Relation gilt:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\,. \tag{3.99}$$

S **Aufgabe 13 (5 Punkte):** *Wirbelstärke*

Die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ stellt eine zentrale Größe der Hydrodynamik dar und kann anschaulich als die Tendenz eines Fluidelements zur Eigendrehung um eine Achse beschrieben werden.

(a) Leiten Sie ausgehend von der Euler-Gleichung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p\,,$$

folgende Gleichung für die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ her:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})\,. \tag{1}$$

In dieser Aufgabe sollen zweidimensionale inkompressible Flüssigkeiten (d.h. solche mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) untersucht werden. Das Geschwindigkeitsfeld einer solchen Flüssigkeit lässt sich darstellen als

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\Phi(x,y,t)\mathbf{e}_z)\,, \tag{2}$$

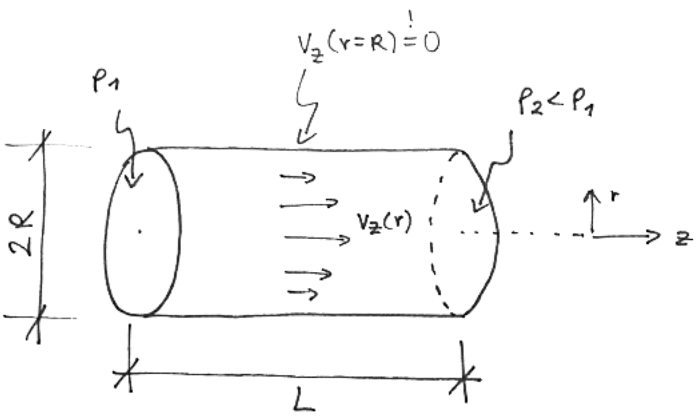
mit der sog. Strömungsfunktion $\Phi(x,y,t)$. Im Folgenden soll nun eine stationäre Strömungsfunktion $\Phi(x,y,t) \equiv \Phi(x,y) \equiv \Phi(|\mathbf{r}|)$ betrachtet werden.

(b) Es gelte $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie nun für Φ? Lösen Sie diese Gleichung und finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.

(c) Es gelte $|\boldsymbol{\omega}| = 2\omega_0 = const.$. Finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.

(d) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ sowie den Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$ für beide Fälle und erläutern Sie den qualitativen Unterschied.

S **Aufgabe 14 (5 Punkte):** *Poiseuille Strömung*
Eine wichtige Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die Strömung einer Flüssigkeit durch



ein zylindrisches Rohr mit Radius R und Länge L. Wir wollen uns auf den Spezialfall einer laminaren, inkompressiblen, stationären Newtonschen Flüssigkeit mit Viskosität η beschränken. Zusätzlich sollen Gravitationskraft und andere externe Kräfte vernachlässigt werden.

(a) Lösen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen mit den oben angegebenen Voraussetzungen, und bestimmen Sie Druck- und Geschwindigkeitsfeld. Verwenden Sie haftende Randbedingungen und eine gegeben Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$.
Hinweis: Beachten Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer realen Flüssigkeit an keinem Ort divergieren darf!

(b) Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Zeiteinheit:

$$Q = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}\,,$$

und zeigen Sie, dass $Q \propto R^4$ (*Hagen-Poiseuillesches Gesetz*).