

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
 Johannes Blaschke (Sprechstunde: Fr 10:00-11:00 in EW 708)

**5. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts**

**Abgabe/Vorrechnen: Mo. 29.05.2017 im Tutorium (10:15, EW 731)**

**S Aufgabe 15 (5 Punkte):** *Zirkulare Couette-Strömung*

Im folgenden wollen wir eine Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen, unendlich langen Zylindern mit Radien  $R_1, R_2$  betrachten, wobei  $R_1 < R_2$ . Die beiden Zylinder rotieren dabei mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  um ihre ortsfesten Achsen.

- (a) Berechnen Sie das Geschwindigkeits- und Druckfeld der Flüssigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Gehen Sie von einer laminaren, stationären, inkompressiblen Strömung und haftenden Randbedingungen aus und vernachlässigen Sie die Gravitation.
- (b) Vergleichen Sie das Ergebnis für  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  mit den Ergebnissen aus Aufgabe 13 (b),(c). Betrachten Sie die Spezialfälle (i)  $\omega_1 = \omega_2$  und (ii)  $R_2 \rightarrow \infty, \omega_2 \rightarrow 0$ .

**M Aufgabe 16:** *Diffusionsgleichung für Wirbel*

Die Diffusionsgleichung für Wirbel ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{b} \tag{3.72}$$

mit der Diffusionskonstante  $D = \eta/\rho_0$  und  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ .

- (a) Nehmen Sie nun an, dass eine Störung am Punkt  $\mathbf{x}_0$  und zur Zeit  $t = 0$  in die Richtung  $\mathbf{n}$  wirkt, so dass

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2\right)\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t)$$

und mit  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t)$ . Berechnen Sie die Greensche Funktion  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t)$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie

$$\int d\mathbf{k} dy \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-yt)}}{-iy + Dk^2} = \frac{2\pi^{5/2}}{(Dt)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathbf{x}^2}{4Dt}\right].$$

- (b) Beweisen Sie

$$\langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 \rangle = \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t) d^3x = 6Dt, \tag{3.75}$$

mittels partieller Integration.

*Hinweis:* Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/c^2} dy = \sqrt{\pi}|c|.$$

**S Aufgabe 17 (5 Punkte):** *Stokesgleichung aus Variationsprinzip*

Lösungen  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  der Stokeschen Gleichung

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{4.1}$$

extremalisieren die Dissipationsleistung des Geschwindigkeitsfeldes

$$W = \int T'_{ij} A_{ij} d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2 d^3x, \tag{4.2}$$

## 5. Übung SPNGG SS17

wenn zusätzlich gefordert wird, dass die Divergenz des Vektorfelds verschwindet. Deshalb kann die Stokesgleichung auch durch ein Variationsverfahren gewonnen werden. Die Divergenzfreiheit geht mit dem Lagrangeparameter  $p$  als Nebenbedingung ein,

$$\delta \left( W - 2 \int p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x \right) = \delta \left( \int 2\eta A_{ij}^2 - 2p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x \right) = 0 .$$

- (a) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem äquivalent zu der Stokesgleichung ist, also die Aussage

$$\delta \left( \int 2\eta A_{ij}^2 - 2p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x \right) = 0 \Leftrightarrow -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$

gilt.

- (b) Welche Randbedingungen ergeben sich, wenn Sie auf der Oberfläche eine Variation zulassen ( $\delta \mathbf{v}|_{\partial V} \neq 0$ ) oder verbieten ( $\delta \mathbf{v}|_{\partial V} = 0$ )?

### Zum Übungsbetrieb:

Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Bedingung für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Es müssen mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte erreicht werden. Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.