Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Johannes Blaschke (Sprechstunde: Fr 10:00-11:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 12.06.2017 im Tutorium (10:15, EW 731)

M **Aufgabe 18**: *Oseen Tensor I*

Wir definieren die Fouriertransformation und Rücktransformation wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\} &= \hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \, , \\ \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} &= f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \, , \end{aligned}$$

mit den Relationen

$$\mathcal{F}\{\nabla f\} = i\mathbf{k}\hat{f}(\mathbf{k}) \, , \quad \text{sowie} \quad \mathcal{F}\{\delta(\mathbf{r})\} = 1 \, .$$

(a) Gegeben sei die Poissongleichung und die biharmonische Gleichung sowie deren Fundamentallösungen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad \text{mit Lösung} \quad \phi = \frac{1}{4\pi r} \, , \qquad (4.9) \\ \nabla^4 \psi(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad \text{mit Lösung} \quad \psi = \frac{r}{8\pi} \, . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \, , \\ \nabla \otimes \nabla \left(\frac{r}{8\pi}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}}{k^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \, . \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die Divergenz der Stokesgleichung (4.1) mit $\rho\mathbf{b} = \mathbf{f}_0\delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}_0 = \text{const.}$. Fouriertransformieren Sie die resultierende Gleichung und bestimmen Sie $\hat{p}(\mathbf{k})$. Fouriertransformieren Sie anschließend die Stokesgleichung (4.1), eliminieren Sie $\hat{p}(\mathbf{k})$ und zeigen Sie, dass

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\eta k^2} \left(\mathbb{1} - \frac{\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}}{k^2} \right) \mathbf{f}_0 \, .$$

S **Aufgabe 19 (2 Punkte):** *Oseen Tensor II*

Setzen Sie $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})$ in die Formel der Rücktransformation ein und vergleichen Sie die auftretenden Terme mit den Ausdrücken aus Aufgabe 18 (a), die Sie skalar mit $\mathbf{f}_0$ multiplizieren. Zeigen Sie, dass für den Oseen-Tensor $\mathbf{O}(\mathbf{r})$ gilt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{O}(\mathbf{r})\mathbf{f}_0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{O}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}}{r^2} \right) \, . \qquad (4.15)$$

S **Aufgabe 20 (8 Punkte):** *Stokes Reibungsgesetz*
Wir suchen das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das um eine Kugel mit Radius R entsteht, wenn sie bei kleiner Reynoldszahl mit der Geschwindigkeit U von einer Flüssigkeit mit der Viskosität η angeströmt wird. Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sei axialsymmetrisch mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r,\theta)\mathbf{e}_r + v_\theta(r,\theta)\mathbf{e}_\theta$$

wobei die Achse mit $\theta = 0$ die Symmetrieachse darstellt. Die Randbedingungen lauten

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \to -U\mathbf{e}_z\ , \quad r \to \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0\ , \quad r = R\ .$$

(a) Die Strömungsfunktion $\Psi(r,\theta)$ für axialsymmetrische Kugelkoordinaten ist definiert (analog zu Aufgabe 13, Blatt 4) über $\mathbf{v} = \nabla \times \left(\frac{\Psi(r,\theta)}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi\right)$. Zeigen Sie folgenden Zusammenhang zwischen Ψ und $\mathbf{v}$:

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\ , \quad \text{sowie} \quad v_\theta = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\ .$$

(b) Berechnen Sie die Vortizität $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ und $\nabla^2\boldsymbol{\omega}$ und finden Sie mit Hilfe der Stokes Gleichung eine Differentialgleichung für Ψ.

(c) Formulieren Sie die Randbedingungen um in Bedingungen für Ψ und lösen Sie die Differentialgleichung mit dem Ansatz $\Psi = f(r)\sin^2\theta$. Zeigen Sie, dass:

$$v_r = -U\cos\theta\left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right)\ , \quad \text{sowie} \quad v_\theta = U\sin\theta\left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right)\ .$$

(d) Berechnen Sie den Druck $p(\mathbf{r})$ aus den Stokes Gleichungen und dem Geschwindigkeitsfeld. Verwenden Sie die Randbedingung $p(\mathbf{r}) \to 0$ für $\mathbf{r} \to \infty$.

(e) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ aus dem Geschwindigkeitsfeld.

(f) Berechnen Sie den Kraftvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{n} = -p\mathbf{n} + 2\eta\mathbf{A}\mathbf{n}\ , \qquad (3.19), (3.41), (3.56)$$

auf der Oberfläche der Kugel $r = R$ und zeigen Sie, dass für die Gesamtkraft F gilt:

$$F = 6\pi\eta R U\ . \qquad (4.22)$$

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche **M** und schriftliche **S** Aufgaben. Die Bedingung für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Es müssen mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte erreicht werden. Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.