Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Johannes Blaschke (Sprechstunde: Fr 10:00-11:00 in EW 708)

8. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 26.06.2017 im Tutorium (10:15, EW 731)

S Aufgabe 23 (4 Punkte): *Reibungsmatrix des langen, dünnen, steifen Stabes*

Berechnen Sie die Reibungskoeffizienten eines Stabes der Länge L, der parallel zur x-Achse ausgerichtet ist, und den man sich aus N Kugeln vom Radius R zusammengesetzt denkt, wobei $L \gg 2R$. Die Geschwindigkeit des j-ten Stabsegments $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$ kann man dann als Superposition seiner eigenen Stokes-Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der Strömungen, die die übrigen Kugeln an seiner Stelle verursachen, approximieren. Nimmt man weiterhin die Strömung der übrigen Segmente als Stokeslets $\mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j)$ an, so erhält man,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_j) = \frac{\mathbf{F}_{seg}}{6\pi\eta R} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j)\ ,$$

mit

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}_j) = \mathbf{O}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\mathbf{F}_{seg} = \frac{1}{8\pi\eta|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}\left(\mathbf{1} + \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x\right)\mathbf{F}_{seg}\ ,$$

und der Kraft pro Stabsegment $\mathbf{F}_{seg} = \mathbf{F}_{ges}/N$.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j)$, indem Sie die Summe mit Hilfe von $N \gg 1$ (d.h. $\Delta x \equiv L/N \to 0$) in ein Integral überführen und über die gesamte Länge des Stabes (von $-L/2$ bis $L/2$) integrieren, aber das j-te Segment (der Breite $2R$) "überspringen".

(b) Finden sie dann einen Ausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit des Stabes $\mathbf{u}$, unter Berücksichtigung von $L \gg R$ sowie unter Vernachlässigung von Randeffekten $x_j \ll \pm L/2$..

(c) Zeigen Sie, dass für die Reibungskoeffizienten gilt:

$$2\gamma_{\|} = \gamma_{\perp} = \frac{4\pi\eta L}{\ln(L/R)}\ . \tag{4.43}$$

S Aufgabe 24 (6 Punkte): *Reibungsmatrix der Helix*

Im Folgenden soll die Reibungsmatrix einer Helix in einer Stokesschen Flüssigkeit berechnet werden. Dabei wird angenommen, dass die angreifende Kraft F und das Drehmoment M, sowie die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit U und Ω in die Richtung der Helixachse $\mathbf{e}_z$ zeigen. Dann sind (F, M) über eine 2×2 Reibungsmatrix linear mit (U, Ω) verbunden,

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \Omega \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

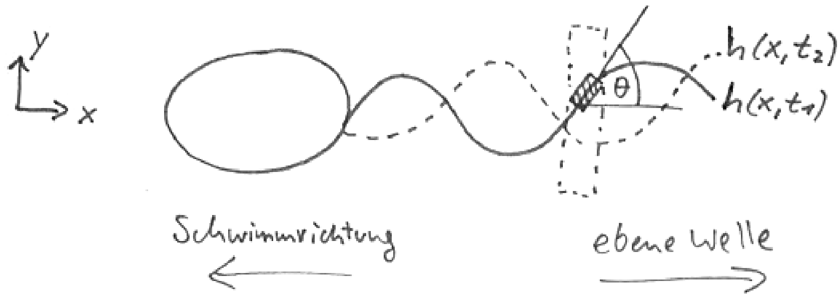
Die Helix ist bei festem Radius R und Ganghöhe p durch den Winkel ϕ parametrisiert,

$$\mathbf{x}(\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ \phi/k \end{pmatrix}, \quad k = 2\pi/p\ .$$

Berechnen Sie nun F und M auf eine Helix der Höhe p ($\phi \in [0, 2\pi]$), indem Sie zuerst U und dann Ω in z-Richtung annehmen. Verwenden Sie die lokale Kraftdichte $\mathbf{f} = (\zeta_{\|}\hat{\mathbf{t}} \otimes \hat{\mathbf{t}} + \zeta_{\perp}(1 - \hat{\mathbf{t}} \otimes \hat{\mathbf{t}}))\mathbf{v}$, wobei $\hat{\mathbf{t}}$ der normierte Tangentialvektor an die Helix ist, und $\zeta_{\|}$, $\zeta_{\perp}$ die Reibungskoeffizienten pro Längeneinheit parallel bzw. normal zum Helixsegment sind. Dabei ist $\mathbf{v} = U\mathbf{e}_z$ (Translation) bzw. $\mathbf{v} = \Omega\mathbf{e}_z \times R\mathbf{e}_\rho$ (Rotation). Aus den linearen Beziehungen können Sie nun γ, β und C ablesen.

8. Übung SPNGG SS17

M **Aufgabe 25**: *Geschwindigkeit eines Spermiums*
In dieser Aufgabe soll die Geschwindigkeit eines Spermiums abgeschätzt werden.



(a) Das fadenförmige Filament der Länge L des Spermiums deformiere sich gemäß

$$h(x,t) = b\sin(kx - \omega t) \ .$$

Aufgrund dieser nach rechts laufenden ebene Welle, schiebt das Spermium Flüssigkeit nach rechts und schwimmt nach links. Das Filament stellen wir uns vor als eine Ansammlung aneinander gereihter Stäbe (deren Länge groß ist im Vergleich zum Durchmesser), die nach oben und unten durch die Flüssigkeit gezogen werden, d.h. $\mathbf{v} = v_y \mathbf{e}_y$ (siehe Skizze). Für die Antriebskraftdichte $\mathbf{f}$ gilt für den Fall kleiner Reynoldszahlen $\mathbf{f} = \boldsymbol{\zeta}\mathbf{v}$ mit dem Reibungstensor $\boldsymbol{\zeta}$ pro Längeneinheit.

Berechnen Sie die Antriebskraftdichte f_x parallel zur Schwimmrichtung. Bestimmen Sie dazu den Reibungstensor pro Längeneinheit $\boldsymbol{\zeta}(\theta) = \mathbf{R}^T(\theta)\boldsymbol{\zeta}_0\mathbf{R}(\theta)$ eines Stabelements, das den Winkel θ zur x-Achse hat.

$$\boldsymbol{\zeta}_0 = \begin{pmatrix} \zeta_{||} & 0 \\ 0 & \zeta_{\perp} \end{pmatrix}$$

ist dabei der Reibungstensor eines Stabelements, das parallel zur x-Achse ausgerichtet ist. Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion $h(x,t)$ die Geschwindigkeit v und den Winkel θ. Nehmen Sie dabei an, dass der Winkel θ klein ist ($\sin\theta \approx \theta$).

(b) Berechnen Sie die über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gemittelte Antriebskraft

$$\langle F_x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^L f_x dx dt \ .$$

(c) Stellen Sie ein Kräftegleichgewicht auf, aus der mittleren Antriebskraft und der Reibungskraft des Spermiums (approximieren Sie dazu das Spermium als Stab der Länge L). Zeigen Sie, dass für die mittlere Geschwindigkeit des Spermius gilt:

$$\langle u \rangle = -\frac{\zeta_{\perp} - \zeta_{||}}{2\zeta_{||}}\omega k b^2 \ .$$