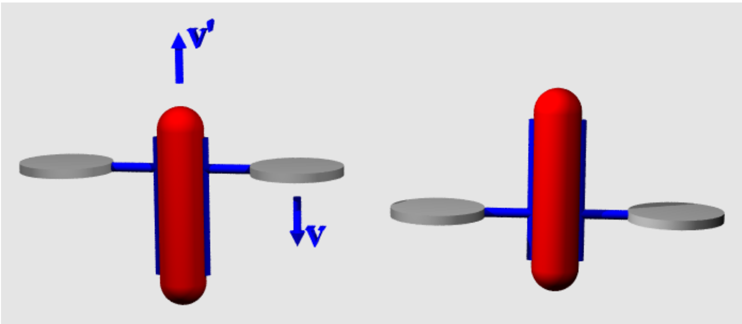
Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Johannes Blaschke (Sprechstunde: Fr 10:00-11:00 in EW 708)

9. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 03.07.2017 im Tutorium (10:15, EW 731)

M **Aufgabe 26**: *Schwimmen bei kleinen Reynoldszahlen*

Wir betrachten einen stark vereinfachten Modellschwimmer, der eine Art Paddel relativ zu seinem



Körper bewegt. Um die Rechnung zu vereinfachen nehmen wir an, dass sich der Körper und das Paddel nur in einer Dimension bewegen. Für den Fall kleiner Reynoldszahlen sind die auftretenden Geschwindigkeiten und Kräfte durch $F = \gamma v$ mit den für Körper und Paddel unterschiedlichen Reibungskonstanten γ_K und γ_P bestimmt. Zum Schwimmen werden die Paddel relativ zum Körper mit einer Geschwindigkeit v_1 die Strecke s_0 bewegt (erster Schwimmzug).Anschließend werden sie mit einer kleineren Geschwindigkeit v_2 in ihre Ausgangsposition bewegt (zweiter Schwimmzug). Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper beim ersten Schwimmzug bewegt. Wie weit kommt er? Wiederholen Sie die Rechnung für den zweiten Schwimmzug und bestimmen Sie v_1 und v_2 so, dass sich der Schwimmer nach dem kompletten Schwimmzyklus möglichst weit bewegt hat.

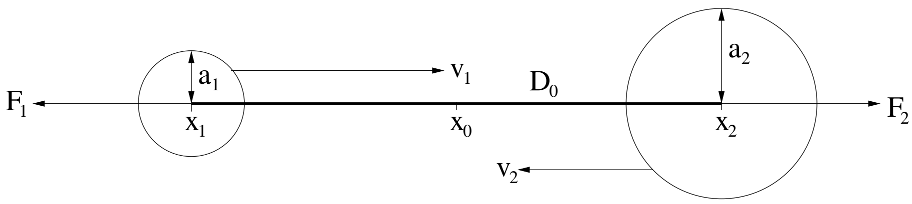
M **Aufgabe 27**: *Expandierende Kugel*

Es soll das Strömungsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ einer kleinen Kugel ($Re \ll 1$) mit variierendem Radius $R(t)$ bestimmt werden. Nehmen Sie dabei an, dass sich das Volumen gleichmäßig mit der Geschwindigkeit W vergrößert ($W > 0$) bzw. verkleinert ($W < 0$).

(a) Zeigen Sie, dass $R(t) = \left(R^3(0) + \frac{3}{4\pi} tW\right)^{1/3}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Strömungsfeld um die Kugel gegeben ist durch $\mathbf{v}(r) = W/(4\pi r^2)\mathbf{e}_r$. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 20 (a).

S **Aufgabe 28 (5 Punkte):** *Zwei gekoppelte Kugeln*



Zwei Kugeln mit Radien $a_1 \leqslant a_2$ sind durch ein Verbindungsstück der Länge $D(t) = D_0 + Ut$ miteinander verbunden. Für $t > 0$ wird das Verbindungsstück also gleichmäßig verlängert ($U > 0$) und die Kugeln beginnen sich zu bewegen. Benutzen Sie im Folgenden die Oseen-Näherung

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\mathbf{F}_i(t)}{6\pi\eta a_i} + \sum_{j\neq i} \mathbf{O}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))\mathbf{F}_j(t)$$

mit $a_1 \leqslant a_2 \ll D(t)$ für hinreichend kleine Zeiten und die Tatsache, dass keine externen Kräfte wirken.

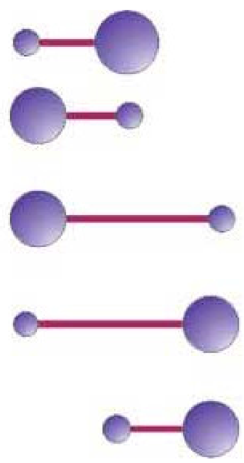
(a) Berechnen Sie die Kräfte $F_1(t)$ und $F_2(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass:

$$v_1(t) = U \frac{2D(t)a_2 - 3a_1a_2}{6a_1a_2 - 2D(t)(a_1 + a_2)} \;, \quad v_2(t) = -U \frac{2D(t)a_1 - 3a_1a_2}{6a_1a_2 - 2D(t)(a_1 + a_2)} \;.$$

S Aufgabe 29 (5 Punkte): *Pushmepullyou*

Pushmepullyou ist ein kräftefreier Schwimmer, welcher aus zwei verbundenen Kugeln mit Radien $a_1(t)$, $a_2(t)$ besteht. Eine Möglichkeit, eine nichtreziproke Schwimmbewegung zu bekommen, ist die im folgenden erläuterte Bewegung, wobei die Schwimmperiode T in vier Schritte $T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)}$ aufgeteilt wird:



Schritt (1): Bei konstantem Mittelpunktsabstand $r_{12} = D_1$ wird Volumen mit der konstanten Geschwindigkeit $W_1 = \dot{V}_1(t) = -\dot{V}_2(t) > 0$ für die Dauer $T^{(1)}$ von Kugel 2 auf Kugel 1 übertragen, wobei

$$V = V_1(t) + V_2(t) = \frac{4\pi}{3} a_1^3(t) + \frac{4\pi}{3} a_2^3(t) = \text{const} \;,$$

mit

$$V_1(T^{(1)}) = V_2(0),\; V_2(T^{(1)}) = V_1(0) \quad \Leftrightarrow \quad a_1(0) = a_2(T^{(1)}) \equiv a_\alpha, a_2(0) = a_1(T^{(1)}) \equiv a_\beta \;.$$

In erster Näherung bewegen sich die Kugeln kräftefrei jeweils im Strömungsfeld der anderen Kugel. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $U^{(1)}$ des Schwimmermittelpunktes. Wie lange ($T^{(1)}$) dauert das 'Pumpen'? Bestimmen Sie die Verschiebung des Schwimmermittelpunkts $\Delta x^{(1)}$.
Schritt (2): Nun wird der Abstand zwischen den Kugeln linear mit der konstanten Geschwindigkeit $W_2 > 0$ von D_1 auf D_2 erhöht. Welche Schwimmgeschwindigkeit $U^{(2)}$ und welche Verschiebung $\Delta x^{(2)}$ ergibt sich? Wie lange ($T^{(2)}$) dauert das 'Strecken'?
Schritt (3): Wie Schritt (1), aber $r_{12} = D_2$, $W_1 < 0$ und

$$a_1(0) = a_2(T^{(3)}) \equiv a_\beta, a_2(0) = a_1(T^{(3)}) \equiv a_\alpha \;.$$

Berechnen Sie $U^{(3)}$, $T^{(3)}$ und $\Delta x^{(3)}$. Nun wird also Volumen von Kugel 1 zu Kugel 2 gepumpt.
Schritt (4): Wie Schritt (2), aber Verkürzung von D_2 auf D_1 mit $W_2 < 0$. Berechnen Sie $U^{(4)}$, $T^{(4)}$ und $\Delta x^{(4)}$.

Nehmen Sie nun an, dass $a_\beta = 4a_\alpha$, $D_1 = 16a_\alpha$, $D_2 = 80a_\alpha$ und berechnen Sie die totale Verschiebung $\Delta x = \Delta x^{(1)} + \Delta x^{(2)} + \Delta x^{(3)} + \Delta x^{(4)}$ während einer Periode T.