Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
Dr. Anna Zakharova
Dr. Wassilij Kopylov
Alexander Kraft

6. Übungsblatt – Theoretischen Physik IV

Abgabe: Di. 06. 06. 2017 bis 12:00 Uhr im Briefkasten am Ausgang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in 3er-Gruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummer und das Tutorium an!

Aufgabe 1 (9 Punkte): *Totale Differentiale*
Wir betrachten die Differentialform 1. Ordnung (totale Differentialgleichung) der Form

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0\,. \tag{1}$$

1. Wann nennt man das Differential (1) exakt, wann intergrierbar und wann nicht integrierbar?
2. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Integrierbarkeitsbedingung der Differentialform (1)

$$P \cdot (\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}) + Q \cdot (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}) + R \cdot (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 0\,. \tag{2}$$

   In welchem Fall ist dann die Differentialform exakt? Hinweis: Benutzen Sie dazu die Definition der Integrierbarkeit sowie die Vertauschung von Ableitungen. Vergessen Sie nicht den integrierenden Faktor mitzubenutzen.
3. Sei nun folgende totale Differentialgleichung gegeben: $y^2dx - zdy + ydz = 0$.
   (a) Überprüfen Sie diese Differentialgleichung auf die Integrierbarkeit.
   (b) Handelt es sich um ein exaktes Differential? Falls nicht, wie lautet der integrierende Faktor.
   (c) Lösen Sie diese Gleichung, d.h. finden Sie eine Stammfunktion.
4. Zeigen Sie nun, dass $\delta Q = dU - \delta W$ aus dem 1. Hauptsatz kein totales Differential ist. Gehen Sie von $\delta W = -pdV$ aus.
5. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\alpha(T)$ so, dass aus δQ ein totales Differential wird. Gehen Sie dabe von einem idealen Gas ($p \cdot V = Nk_BT, (\frac{\partial U}{\partial T})_V = const$) aus. Was für Konstrukt erhalten wir dann?

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Freie Energie, Maxwell-Relation*
Betrachten Sie ein vorgespanntes leicht elastisches Band („Gummiband") der Länge l mit Anfangsspannung Γ. Das Band werde um die Länge dl auseinandergezogen, wobei eine Arbeit $dW = \Gamma dl$ aufgewandt werden muss. Formulieren Sie für dieses Band die fundamentale thermodynamische Gleichung und leiten Sie aus der Definition der Helmholtzschen Freien Energie folgende Maxwell-Relation her:

$$\left(\frac{dS}{dl}\right)_T = -\left(\frac{d\Gamma}{dT}\right)_l . \tag{3}$$

Die Spannung in einem *nicht vorgespannten* Band der Länge l_0 bei Temperatur T ist durch

$$\Gamma = \frac{RT}{l_0}\left[\frac{l}{l_0} - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right] \tag{4}$$

gegeben. Betrachten Sie die Entropie als Funktion der Temperatur und der Länge und zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung konstanter Wärmekapazität bei konstanter Länge, $C_l = (\frac{\delta Q}{\partial T})_l = 3R$, die Änderung der Entropie zwischen einem Anfangszustand mit Länge l_0, sowie Temperatur T_0, und einem Endzustand mit Länge l, sowie Temperatur T, durch

$$S - S_0 = 3R \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 + \frac{l_0}{l} - \frac{3}{2}\right] \tag{5}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): *Gibbs'sche freie Energie*
Gegeben sei die inneren Energie $U = U(S, V, N)$ mit $dU = TdS - pdV + \mu dN$ eines einfachen Stoffes (z.B. Gas)

1. Erklären Sie kurz die in dU auftretenden Größen. Gehen Sie kurz auf die Bedeutung von μ ein.

2. Gibbs'sche freie Energie

   (a) Bestimmen Sie mithilfe von U die Gibbs'sche freie Energie $G = G(T, p, N)$.

   (b) Zeigen Sie, dass für das Differential dG folgende Beziehung gilt: $dG = -SdT + Vdp + \mu dN$.

   (c) Was ergeben die Ableitungen nach natürlichen Variablen? Wie lauten die zugehörigen Maxwell-Relationen?

   (d) Zeigen Sie ausgehend von der Homogenitätsrelation $G(T, p, \lambda N) = \lambda G(T, p, N)$ die Gibbs-Duhem-Relation $G(T, p, N) = \mu N$.

Vorlesung:
- Mittwoch 12:15 Uhr – 14:00 Uhr im EW 203.
- Freitag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203.

Tutorien:
- Mo, 14–16 Uhr, EW 229 (Wassilij Kopylov).
- Mi, 10–12 Uhr, EW 229 (Alexander Kraft).
- Do, 10–12 Uhr, EW 731 (Anna Zakharova).

Klausur:
- Freitag, den 14.07.2017, von 8:00 – 10:00 Uhr im H 3010.

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. E. Schöll, PhD		nach Vereinbarung	EW 735	23500
Dr. Anna Zakharova	Di.	15:00–16:00 Uhr	ER 244	28948
Dr. Wassilij Kopylov	Mi.	15:30–16:30 Uhr	EW 146	21776
Alexander Kraft	Di	13–14 Uhr	EW 269	28852