

Prof. Dr. Andreas Knorr  
Dr. Marten Richter

### 1. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

**Abgabe: Bis Mittwoch, den 3.5.2017 in der Übung**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

**Aufgabe 1 (4 Punkte): Orthogonalitätsrelation der Helmholtzgleichung**

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die aus der Helmholtzgleichung:

$$\Delta \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

bestimmten Moden  $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$ , die Orthogonalitätsrelation:

$$\int d^3r \mathbf{A}_\lambda^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\lambda'}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\omega_\lambda \neq \omega_{\lambda'}) \quad (2)$$

erfüllen. Wir nehmen dabei als Randbedingung an, dass die Moden im Unendlichen verschwinden.

**Aufgabe 2 (6 Punkte): Vollständigkeitsrelation der Helmholtzgleichung**

Bei Wahl entsprechender Randbedingungen sind im unendlich ausgedehnten Raum, die ebenen Wellen  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \epsilon_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  als Lösung der Helmholtzgleichung. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}^*(\mathbf{r}') = \delta^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3)$$

erfüllt ist. Beachten Sie dazu insbesondere die Hinweise aus der Übung zur Definition der transversalen  $\delta$ -Funktion. Das Integral  $\int d^3r \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} = \frac{4\pi}{k^2}$  sollte bei der Rechnung helfen.

**Aufgabe 3 (8 Punkte): Aspekte der Quantisierung im räumlich inhomogenen nicht dispersiven Medium**

Wir betrachten im folgenden das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  nur in einem kleinen Frequenzbereich  $\Delta\omega$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta\omega} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (4)$$

Wir nehmen an das  $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \approx \varepsilon(\mathbf{r}, \omega_0) \approx \varepsilon^*(\mathbf{r}, \omega_0) =: \varepsilon(\mathbf{r})$ .

1. Begründen Sie mit Hilfe der Kramers-Kronig Relation, warum diese Annahme nur für einen kleinen Frequenzbereich gültig sein kann?
2. Bei der Quantisierung im Medium wird in der Regel nicht die Coulombgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$  verwendet, sondern die verallgemeinerte Coulomb Gleichung  $\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0$  verwendet, daher benutzen wir diese im folgenden. Falls keine externen freien Ladungen und Ströme vorhanden sind, hat die Lagrangefunktion die Form:

$$L = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}))^2 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \right\}. \quad (5)$$

Zeigen Sie, ausgehend von der Lagrangefunktion, dass dann gilt:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0 \quad (6)$$

## 1. Übung TPV SS17

3. Berechnen Sie den kanonischen Impuls (und interpretieren Sie diesen) und die Hamiltonfunktion.
4. Wie muss die Vertauschungsrelation unter Beachtung der veränderten Eichung aussehen? (Tipps zur Definition der speziellen  $\delta$ -Funktion aus der Übung beachten.).
5. Motivieren Sie durch Analogieschluss (keine Rechnung) anhand von Gleichungen zur Aufgabe 1 inwiefern die Orthogonalitätsrelation modifiziert werden muss.

**Vorlesung:**

- Donnerstag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.
- Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.

**Übung:**

- Mittwoch 14:00-16:00 Uhr im EW 114, Richter.

**Anmeldung:** Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik VI: Theoretische Optik" erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.  
Für Nachmeldungen bitte den Assistenten ansprechen.

**Webseite:**

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <http://www.itp.tu-berlin.de/?183210>

**Scheinkriterien:**

- Mindestens 60% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.

**Bemerkung:** Bei den Übungsaufgaben werden nur dokumentenechte, handschriftliche Originale akzeptiert. Es werden keine Kopien oder elektronische Abgaben akzeptiert.

### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Scully, Zubairy, Quantum optics (Cambridge)
- Loudon, The Quantum Theory of Light (Oxford)
- Allen, Eberly, Optical Resonances and two-level atoms (Dover)
- Mandel, Non-linear Optics (Wiley-VCh)
- Born, Wolf, Theoretische Optik (Cambridge)
- Fox, Quantum Optics (Oxford)
- Schubert, Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics (Wiley)
- Römer, Theoretical Optics (Wiley)