

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter

2. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10.5.2017 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Vorbereitende Rechnungen für den Wellenleiter

Wir betrachten einen Wellenleiter der ein Medium (beschrieben durch $\bar{\epsilon}$ und $\bar{\mu}$) einschließt und in dem die Propagation entlang der z-Richtung erfolgt. Die elektrischen und magnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} werden in transversale und z-Komponente zerlegt: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{e}_z E_z$ mit $\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_z = 0$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{e}_z B_z$ mit $\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{e}_z = 0$.

1. Ausgehend von den homogenen Maxwellgleichungen im Frequenzraum ohne externe Quellen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad \nabla \times \mathbf{B} = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

mit $c^2 = 1/(\bar{\epsilon}\bar{\mu})$, zeigen Sie:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla_t \cdot \mathbf{E}_t &= -\partial_z E_z & (ii) \quad \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t &= -\partial_z B_z \\ (iii) \quad \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) &= i\omega B_z & (iv) \quad \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) &= -i\bar{\mu}\bar{\epsilon}\omega E_z \end{aligned} \quad (1)$$

2. sowie

$$(v) \quad \partial_z \mathbf{E}_t + i\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_t = \nabla_t E_z \quad (vi) \quad \partial_z \mathbf{B}_t - i\omega \bar{\epsilon}\bar{\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t = \nabla_t B_z. \quad (2)$$

3. Für die Vorwärtspropagation im Wellenleiter wird der Ansatz $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{ik_z z}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y)e^{ik_z z}$ verwendet. Leiten Sie für diesen Ansatz, ausgehend von den in dieser Aufgabe hergeleiteten Relationen folgende Formeln her:

$$\mathbf{E}_t(x, y) = \frac{i}{\bar{\mu}\bar{\epsilon}\omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t E_z(x, y) - \omega \mathbf{e}_z \times \nabla_t B_z(x, y)) \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_t(x, y) = \frac{i}{\bar{\mu}\bar{\epsilon}\omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t B_z(x, y) - \bar{\mu}\bar{\epsilon}\omega \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z(x, y)). \quad (4)$$

Aufgabe 2 (9 Punkte): Glasfaser

Betrachten Sie einen dielektrischen Wellenleiter (Glasfaser). Die Glasfaser ist zylindersymmetrisch und besteht aus einem Kern mit Radius R und Brechungsindex n_K sowie einem Mantel mit Brechungsindex n_M .

- (i) In der Faser breite sich eine Welle nur in z-Richtung aus. Machen Sie einen (den Symmetrien des Problems angemessenen) Ansatz für das elektrische und magnetische Feld.
- (ii) Leiten Sie damit aus der Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{\partial_t^2}{c^2} \vec{E} = 0$$

die Helmholtzgleichung

$$\Delta_t \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \vec{E} = 0$$

für die Vektorkomponente $E_z(r, \phi)$ her. Geben sie dazu den transversalen Laplaceoperator Δ_t explizit in Zylinderkoordinaten an.

2. Übung TPV SS17

- (iii) Leiten Sie daraus für zwei Fälle, eine (bzw. modifizierte) Besselsche Differentialgleichung her (Ansatz: $E_z(r, \phi) = e^{\pm il\phi} e(r)$).
- (iv) Welchen Bedingungen sollten die Lösungen genügen, damit ein möglichst "guter" Wellenleiter entsteht? Wählen Sie die entsprechenden Besselfunktionen für die Lösungen im Mantel und im Kern aus und bestimmen sie die nötigen Beziehungen von n_M , n_K und dem Wellenzahlvektor k (Stetigkeit der Lösung an der Grenze Mantel-Kern beachten!). In welchem Bereich darf die Propagationskonstante liegen?
- (v) Stellen Sie die radiale Intensitätsverteilung der z -Komponente des elektrischen Feldes graphisch da.

Vorlesung:

- Donnerstag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.
- Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.

Übung:

- Mittwoch 14:00-16:00 Uhr im EW 114, Richter.

Anmeldung: Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik VI: Theoretische Optik" erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.
Für Nachmeldungen bitte den Assistenten ansprechen.

Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <http://www.itp.tu-berlin.de/?183210>

Scheinkriterien:

- Mindestens 60% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur dokumentenechte, handschriftliche Originale akzeptiert. Es werden keine Kopien oder elektronischen Abgaben akzeptiert.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Scully, Zubairy, Quantum optics (Cambridge)
- Loudon, The Quantum Theory of Light (Oxford)
- Allen, Eberly, Optical Resonances and two-level atoms (Dover)
- Mandel, Non-linear Optics (Wiley-VCh)
- Born, Wolf, Theoretische Optik (Cambridge)
- Fox, Quantum Optics (Oxford)
- Schubert, Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics (Wiley)
- Römer, Theoretical Optics (Wiley)