

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter

3. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.5.2017 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Strahlungsdämpfung der Dipoldichte

Wir betrachten ein Atom mit zwei Niveaus, das an das Photonenfeld im Vakuum im Volumen L^3 koppelt. Es wird durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$H = \varepsilon_1 a_1^\dagger a_1 + \varepsilon_2 a_2^\dagger a_2 + \sum_{k\lambda} \hbar \omega_{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} + \sum_{k\lambda} g_{12}^{k\lambda} c_{k\lambda}^\dagger a_1^\dagger a_2 + \sum_{k\lambda} g_{21}^{k\lambda*} c_{k\lambda} a_2^\dagger a_1 \quad (1)$$

mit den elektronischen Erzeuger und Vernichtern a^\dagger, a mit ihren Energien $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, den photonischen Erzeuger und Vernichtern c^\dagger, c und ihrer Frequenz $\omega_{k\lambda}$ sowie der Elektron-Photon-Kopplung $g_{12}^{k\lambda} = \nu \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 L^3} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{e}_{k,\lambda}$. Dabei ist \mathbf{d}_{12} das Dipolmoment des Übergangs zwischen Niveau 1 und 2 und $\mathbf{e}_{k,\lambda}$ die Polarisationsrichtung der Photonmode.

1. Vollziehen Sie die Berechnung der Bewegungsgleichung für $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ nach. Sie erhalten:

$$\partial_t \langle a_1^\dagger a_2 \rangle = \frac{\nu}{\hbar} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \langle a_1^\dagger a_2 \rangle + \frac{\nu}{\hbar} \sum_{k\lambda} g_{21}^{k\lambda*} (\langle c_{k\lambda} a_1^\dagger a_1 \rangle - \langle c_{k\lambda} a_2^\dagger a_2 \rangle). \quad (2)$$

2. Stellen Sie auch die Bewegungsgleichungen für $\langle c_{k\lambda} a_1^\dagger a_1 \rangle$ und $\langle c_{k\lambda} a_2^\dagger a_2 \rangle$ auf. Führen Sie analog eine Badannahme für die Photonen durch. Lösen Sie die Gleichungen in Markovnäherung, Sie erhalten (mit $n_{k\lambda} = \langle c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} \rangle$):

$$\langle c_{k\lambda} a_1^\dagger a_1 \rangle = -\frac{\nu}{\hbar^2} g_{12}^{k\lambda} \frac{n_{k\lambda} + 1}{-\nu(\omega_{\hbar\lambda k} + \varepsilon_1/\hbar - \varepsilon_2/\hbar) + \gamma_0 \hbar} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle \quad (3)$$

$$\langle c_{k\lambda} a_2^\dagger a_2 \rangle = \frac{\nu}{\hbar^2} g_{12}^{k\lambda} \frac{n_{k\lambda}}{-\nu(\omega_{\hbar\lambda k} + \varepsilon_1/\hbar - \varepsilon_2/\hbar) + \gamma_0 \hbar} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle, \quad (4)$$

wobei eine Konvergenz erzeugende Zerfallskonstante γ_0 eingefügt wurde. Hinweis: $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ ist eine schnell oszillierende Größe, diese muß für die Markovnäherung in eine langsam oszillierende Größe umgewandelt werden, z.B. $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle(t) = e^{-\frac{\nu}{\hbar}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(t-t')} \langle \tilde{a}_1^\dagger a_2 \rangle(t')$, wobei $\langle \tilde{a}_1^\dagger a_2 \rangle$ eine langsame Größe ist.

3. Setzen Sie die Ergebnisse aus dem letzten Aufgabenteil für den Fall, dass die spontane Emission dominiert ($n_{k\lambda} \approx 0$) in die Gleichung für $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$ ein, sie erhalten:

$$\partial_t \langle a_1^\dagger a_2 \rangle = \frac{\nu}{\hbar} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \langle a_1^\dagger a_2 \rangle - \gamma_{sp} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle \quad (5)$$

mit $\gamma_{sp} = \sum_{k\lambda} \frac{|g_{12}^{k\lambda}|^2}{\hbar^2} \pi \delta(\omega_{k\lambda} - \omega_0)$ wobei $\omega_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/\hbar$.

4. Zeigen Sie, dass $\gamma_{sp} = \frac{|d_{12}|^2}{3\pi^2 \varepsilon_0 \hbar} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^3$. Wie groß ist der Zerfall im Vergleich zum radiativen Zerfall einer Dichte wie in der Übung diskutiert? Warum sind Auswahlregeln auch für den radiativen Zerfall wichtig?

3. Übung TPV SS17

Vorlesung:

- Donnerstag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.
- Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.

Übung:

- Mittwoch 14:00-16:00 Uhr im EW 114, Richter.

Anmeldung: Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung “Theoretische Physik VI: Theoretische Optik” erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.
Für Nachmeldungen bitte den Assistenten ansprechen.

Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <http://www.itp.tu-berlin.de/?183210>

Scheinkriterien:

- Mindestens 60% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur dokumentenechte, handschriftliche Originale akzeptiert. Es werden keine Kopien oder elektronischen Abgaben akzeptiert.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Scully, Zubairy, Quantum optics (Cambridge)
- Loudon, The Quantum Theory of Light (Oxford)
- Allen, Eberly, Optical Resonances and two-level atoms (Dover)
- Mandel, Non-linear Optics (Wiley-VCh)
- Born, Wolf, Theoretische Optik (Cambridge)
- Fox, Quantum Optics (Oxford)
- Schubert, Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics (Wiley)
- Römer, Theoretical Optics (Wiley)