Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter

5. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7.6.2017 in der Übung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Dichtematrixgleichungen*

1. Leiten Sie aus der Liouvillegleichung $\partial_t \rho = \frac{\imath}{\hbar}[\rho, H]_-$ mit $H = H_0 + H_{ww}$, die Dichtematrixgleichungen:
$$\partial_t \rho_{nm} = \frac{\imath}{\hbar}(E_m - E_n)\rho_{nm} + \frac{\imath}{\hbar}\sum_h \rho_{nh} H_{WW}^{hm} - \frac{\imath}{\hbar}\sum_h H_{WW}^{nh}\rho_{hm} \tag{1}$$
für $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$, wobei $|n\rangle$ eine ONB ist mit $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$. Außerdem ist $H_{WW}^{nh} = \langle n|H_{WW}|h\rangle$.

2. Analog dazu leiten Sie aus der Schrödingergleichung $\imath\hbar\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$, die Bewegungsgleichung für die Entwicklungskoeffizienten $c_n(t)$ für den Ansatz $|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$.

3. Wie hängen die Lösungen aus 2 mit der Dichtematrix aus 1 zusammen?

4. Leiten Sie für den Spezialfall von zwei Niveaus $|1\rangle$, $|2\rangle$, die Dichtematrixgleichungen für ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{12} und ρ_{21} auf. Nutzen Sie dabei auftretende Symmetrien. ($H_{WW}^{11} = H_{WW}^{22} = 0$.)

5. Die Liouville von Neumann kann durch Lindbladoperatoren, die die Dissipation beschreiben ergänzt werden: $\partial_t \rho = \frac{\imath}{\hbar}[\rho, H]_- + \mathcal{L}\rho$, diese haben die allgemeine Form $\mathcal{L}\rho = \sum_k \frac{\gamma_k}{2}(2A_k\rho A_k^\dagger - A_k^\dagger A_k \rho - \rho A_k^\dagger A_k)$. Leiten Sie die dissipativen Terme für den Zweiniveausystemfall, also für die Gleichungen von ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{12} und ρ_{21}, für den spontanen Zerfall $A^{sp} = |1\rangle\langle 2|$ mit γ_{sp} und für pure dephasing $A^{pure} = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$ her.

6. Begründen Sie aus den vorherigen Ergebnissen, warum es notwendig ist mit der Dichtematrix zu rechnen und warum die Schrödingergleichung nicht ohne weiteres ausreichend für die Beschreibung ist.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 2 (7 Punkte): *Lösung der paraxialen Wellengleichung für einen Gaußstrahl*
Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion der Lösung der in der Vorlesung diskutierten paraxialen Wellengleichung für einen Gaußstrahl.

1. Zeigen Sie durch eine Fouriertransformation für $r_{\|}-$ Richtung, dass für das Fourier transformierte Feld gilt:

$$\left(\partial_\zeta - \frac{1}{2\imath k_L}\mathbf{q}_{\|}^2\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_{\|},\zeta) = 0 \tag{2}$$

2. Die Anfangsverteilung des Gaußstrahls ist gegeben als $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_{\|},0) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}$. Zeigen Sie: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_{\|},0) = \mathbf{E}_0 \pi w_0^2 e^{-\frac{q_{\|}^2}{4}w_0^2}$

3. Zeigen Sie, dass allgemein: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_{\|},\zeta) = e^{\frac{q_{\|}^2}{2\imath k_L}\zeta}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_{\|},0)$ gilt.

4. Verwenden Sie das Ergebnis um die Lösung im Ortsraum:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_{\|},\zeta) = \frac{\exp\left(-\frac{r_{\|}^2}{w_0^2(1+2\imath\zeta/(k_L w_0^2))}\right)}{1+2\imath\zeta/(k_L w_0^2)} \tag{3}$$

   herzuleiten. Plotten Sie das Ergebnis bei $\lambda = 500\mathrm{nm}$ und einer Pulsbreite $w_0 = 4000\mathrm{nm}$ sinnvoll über die Koordinaten $r_{\|}$ und ζ.

5. Für spezielle transversale Randbedingungen werden auch die folgenden Strahlen untersucht: $\tilde{\mathbf{E}}_{nm}(\mathbf{r}_{\|},\zeta) \propto \partial_x^n \partial_y^m \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_{\|},\zeta)\omega_0^{n+m}$ (siehe Diskussion in der Vorlesung). Plotten Sie die Moden E^{11}, E^{10}, E^{01}, E^{00} über x und y.