Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter

6. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.6.2017 in der Übung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (3 Punkte): *Blochgleichung mit permanentem Dipolmoment*

Wir betrachten ein Zwei-Niveausystem an der Stelle $\mathbf{R}$ beschrieben durch den Hamiltonian $H = H_0 + H_{ww}$:

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2|, \qquad H_{WW} = \sum_{nm} \mathbf{d}_{nm} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t)|n\rangle\langle m|, \tag{1}$$

mit $\omega_2 > \omega_1$ und mit nicht verschwindenden permanentem und Übergangsdipolmomenten: $\mathbf{d}_{11} \neq 0$, $\mathbf{d}_{22} \neq 0$ und $\mathbf{d}_{12} = \mathbf{d}_{21}^* \neq 0$.

1. Verwenden Sie nun Gleichung 1 von Aufgabe 1 Blatt 5, um zu zeigen das die Bewegungsgleichungen für die mikroskopische Polarisation $p_{12} = \rho_{12}^*$ und die Inversion $\Delta_{12} = \rho_{11} - \rho_{22}$, die Form:
$$\partial_t p_{12} = (-\imath\omega_0 - \imath(\Omega_{22} - \Omega_{11}))p_{12} - \imath\Omega_{12}^*\Delta_{12} \qquad \partial_t\Delta_{12} = \imath 2\Omega(p_{21} - p_{12}) \tag{2}$$
besitzen, mit $\Omega_{nm} = 1/\hbar\ \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \cdot \mathbf{d}_{nm}$, $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ und $\Omega = \Omega_{12}$ reell.

2. Zeigen Sie, dass falls pure Dephasing als Lindbladterm mit $A_{pure} = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$ und $\gamma_{pure} = 1/2\gamma$ eingeführt wird, die Bewegungsgleichungen die Form:
$$\partial_t p_{12} = (-\imath\omega_0 - \imath(\Omega_{22} - \Omega_{11}) - \gamma)p_{12} - \imath\Omega_{12}^*\Delta_{12} \qquad \partial_t\Delta_{12} = \imath 2\Omega(p_{21} - p_{12}) \tag{3}$$
annehmen.

Aufgabe 2 (7 Punkte): *Propagation durch (nicht-)lineare Medien*
Wir starten bei den mikroskopischen Maxwellgleichungen für gebundene Ladungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E} + \mu_0\partial_t\mathbf{P}.$$

1. Leiten Sie die Wellengleichung: $\Delta\mathbf{E} - \frac{\partial_t^2}{c^2}\mathbf{E} = \mu_0\partial_t^2\mathbf{P}$ ab.

2. Wir verwenden nun den Ansatz $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(z, t)e^{\imath(k_L z - \omega_L t)}$ um eine Propagation in z-Richtung zu beschreiben. Unter der Annahme der slowly variying envelope approximation (SVEA), also z.B. $|\partial_t\tilde{\mathbf{E}}(z, t)| \ll \omega_l|\tilde{\mathbf{E}}(z, t)|$, $|\partial_z\tilde{\mathbf{E}}(z, t)| \ll k_L|\tilde{\mathbf{E}}(z, t)|$, zeigen Sie:
$$\left(\partial_z + \frac{1}{c}\partial_t\right)\tilde{\mathbf{E}}(z, t)| = -\imath\frac{\mu_0}{2k}e^{-\imath(kz-\omega t)}\partial_t^2\mathbf{P}(z, t) \tag{4}$$

3. Wir machen im Folgenden den Ansatz $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \imath\alpha_1\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \imath\alpha_3\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$ für Polarisationen mit Hauptbeitrag um ω. Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass α_1 und α_3 klein gegenüber ω sind, sich die Gleichung:
$$\partial_\zeta\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = -\mu_0\omega^2 A(\alpha_1\tilde{\mathbf{E}}(\zeta) + \alpha_3\tilde{\mathbf{E}}(\zeta)|\tilde{\mathbf{E}}(\zeta)|^2) \tag{5}$$
ergibt mit $\partial_\zeta = \partial_z + \frac{1}{c}\partial_t$.

4. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung für die Intensität folgende Form hat, und bestimmen Sie β_1 und β_2:
$$\partial_\zeta I(\zeta) = -\beta_1 I(\zeta) - \beta_2 I(\zeta)^2. \tag{6}$$

5. Lösen Sie die Gleichung für $I(\zeta = 0) = I_0$ und (a) $\beta_1 > 0$ sowie $\beta_2 = 0$ und (b) $\beta_2 > 0$ sowie $\beta_1 = 0$.