Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter

8. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28.6.2017 in der Übung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (13 Punkte): *Propagation geschirpter Pulse*
Im Experiment verwendete Pulse $\tilde{E}(\zeta,\eta)$ sind oft stark entfernt von einer idealen Gaußform. Daher ist es bei vielen Experimenten notwendig, eine zeitabhängige Trägerfrequenz (Chirp) mitzuberücksichtigen. Wir betrachten für die Einhüllende $\tilde{E}(\zeta,\eta)$ die Wellengleichung mit Gruppengeschwindigkeitsdispersion:

$$\partial_\zeta \tilde{E}(\zeta,\eta) + \frac{\imath}{2} k_L'' \partial_\eta^2 \tilde{E}(\zeta,\eta) = 0 \tag{1}$$

Wir führen die Fouriertransformation $\tilde{E}(\zeta,\omega)$ der Einhüllenden ein als:

$$\tilde{E}(\zeta,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\imath(\omega-\omega_l)\eta}\tilde{E}(\zeta,\omega)\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

1. Zeigen Sie, dass die Wellengleichung für die Fouriertransformierte die Form:
$$\partial_\zeta \tilde{E}(\zeta,\omega) - \frac{\imath}{2} k_L''(\omega-\omega_l)^2 \tilde{E}(\zeta,\omega) = 0 \tag{3}$$
annimmt und dass die allgemeine Lösung die Form $\tilde{E}(\zeta,\omega) = \tilde{E}(0,\omega)e^{+\imath k_L''\Delta\omega^2\zeta/2}$ besitzt mit $\Delta\omega = \omega - \omega_l$.

2. Wir betrachten im weiteren den Startpuls $\tilde{E}(0,t) = A_0/2 e^{-\gamma_0 t^2} e^{+\imath\beta_0 t^2}$. Wie verhält sich die Trägerfrequenz für steigende Zeiten t? Zeigen Sie ferner, dass die Fouriertransformierte die Form $\tilde{E}(0,\omega) = \sqrt{\pi}/2 A_0/\sqrt{\gamma_0 - \imath\beta_0} e^{-\Delta\omega^2/4/(\gamma_0-\imath\beta_0)}$ besitzt.

3. Zeigen Sie, dass der Gesamtausdruck für das elektrische Feld die folgende Form hat:
$$\tilde{E}(\zeta,\eta) = \frac{1}{2}A_0 \frac{1}{\sqrt{-2\imath k_L''\zeta(\gamma_0-\imath\beta_0)+1}} e^{-\frac{\eta^2(\gamma_0-\imath\beta_0)}{-2\imath k_L''\zeta(\gamma_0-\imath\beta_0)+1}} \tag{4}$$

4. Im Experiment wird in der Regel nicht das elektrische Feld, sondern die Intensität gemessen. Zeigen Sie, dass gilt:
$$|E(\zeta,\eta)|^2 = \frac{1}{4}|A_0|^2 \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}} e^{-2\eta^2\left(\frac{\gamma_0\alpha+\beta_0\delta}{\alpha^2+\delta^2}\right)} \tag{5}$$
mit $\alpha = -2k_L''\beta_0\zeta + 1$ und $\delta = 2k_L''\gamma_0\zeta$.

5. Zur Interpretation ist es hilfreich eine zeitabhängige Pulsbreite $\gamma(\zeta)$ und eine zeitabhängige Amplitude $A_0(\zeta)$ so einzuführen, dass wir die Form:
$$|E(\zeta,\eta)|^2 = \frac{1}{4}A_0^2(\zeta)e^{-2\gamma(\zeta)\eta^2} \tag{6}$$
erhalten. Wobei $\gamma(\zeta) = \gamma_0/g(\zeta) = 1/\tau_L^2(\zeta)$. Zeigen Sie, dass $g(\zeta) = (1-2k_L''\beta_0\zeta)^2 + (2k_L''\gamma_0\zeta)^2$ und $A_0^2(\zeta) = A_0^2\tau_L(0)/\tau_L(\zeta)$ gilt.

6. Interpretieren Sie das Ergebnis. Zeigen Sie dazu, dass $\tau_L(\zeta)/\tau_L(0) = (1-2\beta_0 k_L'' L_D(1-(1-\frac{\zeta}{L_D})^2))^{1/2}$ gilt. Hierbei ist $L_D = \frac{\beta_0}{2k_L''}\frac{1}{\beta_0^2+\gamma_0^2}$ die Dispersionslänge.

6a Zeigen Sie, dass für kleine ζ gilt $\tau_L(\zeta) = \tau_L(0)(1-2k_L''\beta_0\zeta)$.

6b Zeigen Sie, dass für große $\tau_L \propto \zeta$ gilt. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante.