

Bonusblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Freitag, den 20. Juli 2018 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 06. Juli 2018

Geodäten im sphärisch symmetrischen Schwerfeld (15 Punkte)

Teilchen die nur der Gravitation unterliegen sowie Lichtstrahlen bewegen sich auf Geodäten der Raum-Zeit. Berechnen Sie daher die konkrete Form der Geodäten für den Fall des zentralsymmetrischen Schwerfelds.

Dazu wird vom in Übung 9 ermittelten Schwarzschildschen Linienelement ausgegangen:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

Begründen Sie zunächst warum es dabei ausreichend ist, die Geodäten in der Hyperfläche $\theta = \pi/2 = \text{const.}$ zu betrachten.

Legen Sie dann für Ihre weiteren Überlegungen die um θ „reduzierte“ Schwarzschildmetrik zugrunde:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2)$$

Berechnen Sie damit jetzt die konkrete Form der Geodäten in dieser Hyperebene, indem Sie die Geodätengleichung konkret auswerten:

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0 \quad (3)$$

Dabei werden Sie feststellen, dass die θ -Komponente zum Ausdruck $0 = 0$ führt. Wie sehen die Gleichungen für die anderen Komponenten aus?

Integrieren Sie die Gleichungen für die Komponenten ct und ϕ . Dies führt auf folgende Gleichungen, wo a und b Integrationskonstanten sind.

$$\left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r} \right) \frac{d(ct)}{ds} = a \quad \text{sowie} \quad r^2 \frac{d\phi}{ds} = b. \quad (4)$$

Zudem kann genutzt werden, dass der Tangentialvektor entlang der Geodätischen parallel transportiert wird, weshalb seine Länge konstant ist. Die konstante Länge (C) kann geschrieben werden als:

$$- \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r} \right) \left(\frac{d(ct)}{ds} \right)^2 + \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = C. \quad (5)$$

Nutzen Sie im weiteren diese Gleichung anstelle der Geodätengleichung für die Komponente r , die sich als Folge herausstellt.

Aufgabe ist es nun ct und s zu eliminieren und eine DGL zwischen r und ϕ zu ermitteln! Ersetzen Sie dazu in (5) die entsprechenden Variablen durch (4). Ihr Ergebnis sollte zum Schluss folgende Form besitzen:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = A + \left(1 - \frac{2\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2 r}\right) \left(B - \frac{1}{r^2}\right) \quad \text{mit} \quad A := \frac{a^2}{b^2} \geq 0 \quad \text{sowie} \quad B := \frac{C}{b^2} \leq 0. \quad (6)$$

Warum ist $C < 0$ für Teilchen und $C = 0$ für Licht zu setzen?

Es ist jetzt noch möglich die neue Variable $\sigma := 1/r$ einzuführen. Jetzt kann die DGL (6) noch auf eine DGL 2. Ordnung für σ gebracht werden. Zeigen Sie das folgt:

$$\frac{d^2\sigma}{d\phi^2} = -\frac{\gamma m_{\text{Stern}} B}{c^2} - \sigma + \frac{3\gamma m_{\text{Stern}}}{c^2} \sigma^2. \quad (7)$$

Das Auffinden der Geodäten ist damit auf die Integration dieser Gleichung zurückgeführt.

Lösen Sie die Gleichung für $C < 0$ näherungsweise, indem Sie zunächst folgende Gleichung integrieren:

$$\frac{d^2\sigma_0}{d\phi^2} = -\frac{\gamma m_{\text{Stern}} B}{c^2} - \sigma_0. \quad (8)$$

Lösen Sie jetzt näherungsweise die Ausgangsgleichung (7) indem Sie dort $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ setzen und $(\sigma_0 + \sigma_1)^2 \approx \sigma_0^2$ annehmen und erläutern Sie den daraus hervorgehenden ‚post-Newtonschen‘ Effekt.

Eine Kommentierung Ihres Vorgehens wird erwartet! Dafür gibt es auch Punkte!

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de