

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie II

Abgabe: Freitag, den 01. Juni 2018 vor der Übung
Ausgabe: Freitag, den 18. Mai 2018

Insgesamt 10 Punkte

Aufgabe zum kanonischen Formalismus

Zur Untersuchung der allgemein-relativistischen Lichtausbreitung ist insbesondere das Studium von angepaßten Tetradensystemen von Bedeutung. Aus dem in der Übung eingeführten Tetradensystem läßt sich einfach ein weiteres Tetradensystem mit speziellen Eigenschaften angeben.

a) Zeigen Sie, daß das Tetradensystem:

$$k_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a + u_a) \quad m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_a - u_a) \quad (1)$$

$$t_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_a + iw_a) \quad \bar{t}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_a - iw_a) \quad (2)$$

ein Nullvektoren-Tetradensystem ist, d.h. $k_a k^a = m_a m^a = t_a t^a = 0$ (mit der letzten Gleichung auch $\bar{t}_a \bar{t}^a = 0$) ist.

b) Beweisen Sie die weitere Orthogonalitätseigenschaften und Normierungseigenschaften der einzelnen Tetradenvektoren.

c) Berechnen Sie die Gestalt des metrischen Tensors in diesem Tetradensystem $g^{(r)(s)} = h_a^{(r)} h_b^{(s)} g^{ab}$.

d) Bestimmen Sie die Darstellung des metrischen Tensors $g_{ab} = h_a^{(r)} h_b^{(s)} g_{(r)(s)}$ für das gegebene Tetradensystem.

Killing-Vektoren und die äußere Schwarzschildmetrik

Killing-Vektoren bezeichnen lokale Isometrien (Symmetrietransformationen) in der Raumzeit. Eine notwendige Bedingung für deren Existenz ist, daß ein Vektor ξ_α existiert, der die Gleichung

$$g_{\alpha\beta,\sigma} \xi^\sigma + 2g_{\lambda(\alpha} \xi_{\beta)}^\lambda = 0 \quad (3)$$

erfüllt (Killing-Gleichung).

a) Zeigen Sie, daß Gleichung (1) zu folgender kovarianten Charakterisierung äquivalent ist.

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0 \quad (4)$$

b) Bestimmen Sie die Killing-Vektoren ξ^α für die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) \quad . \quad (5)$$

Hinweise (für Teil b):

- Die bei einer partiellen Integration auftretende Integrationskonstante ist eine Funktion der übrigen Variablen!

- Stellen Sie zunächst das vollständige partielle Differentialgleichungssystem auf.
- Zeigen Sie mit drei dieser Gleichungen, daß $\xi^1 = 0$ gilt und ξ^0 nur eine Funktion von Θ und ϕ ist (eine Gleichung für ξ^1 kann direkt partiell integriert werden).
- Zeigen Sie, daß man mittels der anderen Gleichungen ähnliche Einschränkungen für ξ^2 und ξ^3 erhält.
- Setzen Sie Ihre bisherigen Zwischenergebnisse in die bisher noch nicht genutzten DGLen ein.
- Die von Ihnen ermittelte Lösung für ξ^α hängt von vier Integrationsparametern ab. Es können folglich vier linear unabhängige Vektoren $\xi_I^\alpha; \dots; \xi_{IV}^\alpha$ gebildet werden. Drei davon sind raumartig, einer zeitartig.

Kurze Bonusfragen ohne Rechnung (+2 Punkte):

Warum ist der zeitartige Killingvektor konstant, warum ist immer $\xi^1 = 0$ und an welchen zweidimensionalen Raum erinnern die drei raumartigen Killingvektoren?

Sprechstunde: Nach Vereinbarung oder direkt nach der Übung.

Falls es Fragen gibt, bin ich auch per Mail erreichbar:

gerold.schellstede@campus.tu-berlin.de