Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Jérôme Burelbach (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

6. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 30.05.2018 in der Übung

M Aufgabe 17: *Deformation und Drehung*

Gegeben sei das folgende Geschwindigkeitsfeld in $\mathbb{R}^2$ $(\gamma > 0)$:

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \gamma y \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld und berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ sowie den Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$.

(b) Finden Sie eine geeignete Basis, in der $\mathbf{A}$ diagonal wird und interpretieren Sie die Eigenwerte.

(c) Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{W} = 0$ erfüllt, mit $\mathbf{A}$ wie in (a).

(d) Finden und skizzieren Sie ein Geschwindigkeitsfeld, welches die Bedingung $\mathbf{A} = 0$ erfüllt, mit $\mathbf{W}$ wie in (a).

S Aufgabe 18 (10 Punkte): *Wirbelstärke*

Die Wirbelstärke $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ stellt eine zentrale Größe der Hydrodynamik dar und kann anschaulich als die Tendenz eines Fluidelements zur Eigendrehung um eine Achse beschrieben werden.

(a) Leiten Sie ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p\,,$$

folgende Gleichung für die Wirbelstärke ω her:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) \tag{1}$$

In dieser Aufgabe sollen zweidimensionale inkompressible Flüssigkeiten (d.h. solche mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) untersucht werden. Das Geschwindigkeitsfeld einer solchen Flüssigkeit lässt sich darstellen als

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\Phi(x,y,t)\mathbf{e}_z)\,, \tag{2}$$

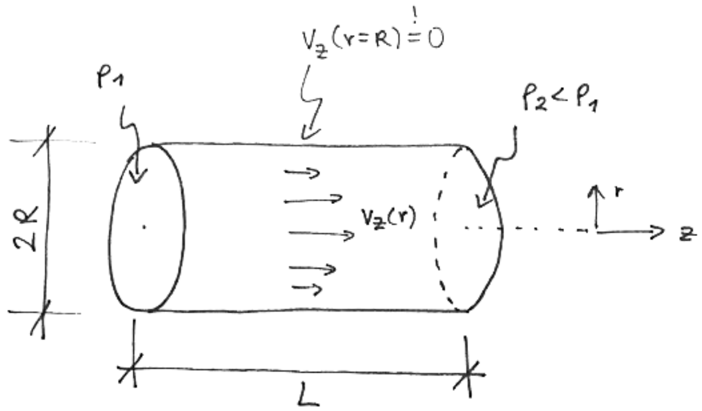
mit der sog. Strömungsfunktion $\Phi(x,y,t)$. Im Folgenden soll nun eine stationäre Strömungsfunktion $\Phi(x,y,t) \equiv \Phi(x,y) \equiv \Phi(|\mathbf{r}|)$ betrachtet werden.

(b) Es gelte $\omega = 0$. Welche Differentialgleichung erhalten Sie nun für Φ? Lösen Sie diese Gleichung und finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.

(c) Es gelte $|\omega| = 2\omega_0 = const.$. Finden Sie $\Phi(|\mathbf{r}|)$.

(d) Berechnen Sie den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{A}$ sowie den Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$ für beide Fälle und erläutern Sie den qualitativen Unterschied.

S **Aufgabe 19 (6 Punkte):** *Poiseuille Strömung*
Eine wichtige Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die Strömung einer Flüssigkeit durch



ein zylindrisches Rohr mit Radius R und Länge L. Wir wollen uns auf den Spezialfall einer laminaren, inkompressiblen, stationären Newtonschen Flüssigkeit mit Viskosität η beschränken. Zusätzlich sollen Gravitationskraft und andere externe Kräfte vernachlässigt werden.

(a) Die Navier-Stokes-Gleichungen mit den oben angegebenen Voraussetzungen lautet

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \ .$$

Bestimmen Sie das Druckfeld $p(z)$ und das Geschwindigkeitsfeld $v_z(r)$. Verwenden Sie haftende Randbedingungen für v_z und eine gegeben Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$.
Hinweis: Beachten Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer realen Flüssigkeit an keinem Ort divergieren darf!

(b) Berechnen Sie die Ausflussmenge Q pro Zeiteinheit:

$$Q = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \ ,$$

und zeigen Sie, dass $Q \propto R^4$ (*Hagen-Poiseuillesches Gesetz*).

M **Aufgabe 20**: *Milch als Suspension*

(a) Wir betrachten einen Behälter voller Milch mit der Höhe $h = 25$ cm. Homogenisierte Milch ist im Wesentlichen eine Suspension aus Fetttröpfchen mit einem Durchmesser von ungefähr 1 μm in Wasser. Die Massendichte von Butterfett ist 0,91 g cm^{-3}. Welches Konzentrationsverhältnis $c(h)/c(0)$ der Fetttröpfchen oben und unten im Behälter stellt sich im Gleichgewicht bei Raumtemperatur ein? Ist homogenisierte Milch eine kolloidale Suspension im Gleichgewicht?

(b) Nach Teil a) sollte sich Milch in Wasser und Fett trennen, was allerdings im Alltag nicht beobachtet wird. Verwenden Sie die Stokes-Formel für die viskose Reibung um abzuschätzen, wie schnell diese Separation in homogenisierter Milch abläuft. Vergleichen Sie die Situation mit unbehandelter Milch, wo die Fetttröpfchen einen Durchmesser von ungefähr 5 μm haben. (Die Viskosität von Wasser ist ungefähr 10^{-3} kg m^{-1} s^{-1}.)