Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Jérôme Burelbach (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

7. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 06.06.2018 in der Übung

S Aufgabe 21 (6 Punkte): *Reibungsmatrix eines Zylinders*

Zwischen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ eines Körpers, der sich durch eine Flüssigkeit bewegt, und der hierzu benötigten Kraft $\mathbf{F}$ besteht der Zusammenhang $\mathbf{F} = \gamma\mathbf{v}$. Die Reibungsmatrix γ ist hierbei stets symmetrisch:

$$\gamma^T = \gamma \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \ ,$$

wobei i und j als Indexe der kartesischen Koordinaten zu verstehen sind. Wir betrachten nun einen zylindersymmetrischen Körper, dessen Symmetrieachse $\mathbf{n}$ in Richtung der z-Achse weise, d.h. $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Sei $\mathbf{R}$ eine Symmetrieoperation (Drehung, Spiegelung), die den Körper in sich selbst überführt. Es gilt dann

$$\gamma = \mathbf{R}\gamma\mathbf{R}^T \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{ij} = R_{ik}R_{jl}\gamma_{kl} \ .$$

(a) Betrachten Sie das Transformationsverhalten von γ unter einer $90°$-Drehung um die z-Achse. Wie schreibt sich die Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ für diese Drehung? Welche Form folgt daraus für die Matrix γ?

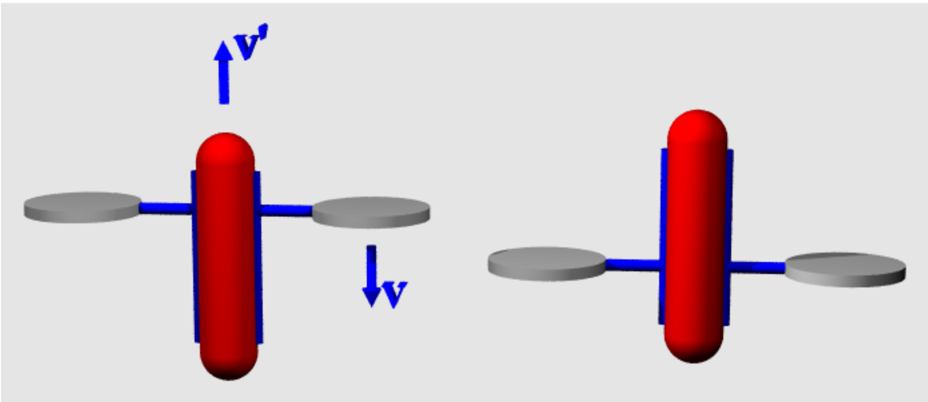
(b) Formulieren Sie das Ergebnis unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem, nur in Abhängigkeit von der Achse $\mathbf{n}$. Zeigen Sie, dass sich γ in der Form

$$\gamma = \gamma_{||}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \gamma_{\perp}(\mathbf{1} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{ij} = \gamma_{||}n_i n_j + \gamma_{\perp}(\delta_{ij} - n_i n_j) \ ,$$

schreiben lässt. Welche Bedeutung haben die Matrizen $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ und $\mathbf{1} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ bzw. die Reibungskonstanten $\gamma_{||}$ und $\gamma_{\perp}$?

M Aufgabe 22: *Schwimmen bei kleinen Reynoldszahlen*

Wir betrachten einen stark vereinfachten Modellschwimmer, der eine Art Paddel relativ zu seinem



Körper bewegt. Um die Rechnung zu vereinfachen nehmen wir an, dass sich der Körper und das Paddel nur in einer Dimension bewegen. Für den Fall kleiner Reynoldszahlen sind die auftretenden Geschwindigkeiten und Kräfte durch $F = \gamma v$ mit den für Körper und Paddel unterschiedlichen Reibungskonstanten γ_K und γ_P bestimmt. Zum Schwimmen werden die Paddel relativ zum Körper mit einer Geschwindigkeit v_1 die Strecke s_0 bewegt (erster Schwimmzug). Anschließend werden sie mit einer kleineren Geschwindigkeit v_2 in ihre Ausgangsposition bewegt (zweiter Schwimmzug). Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper beim ersten Schwimmzug bewegt. Wie weit kommt er? Wiederholen Sie die Rechnung für den zweiten Schwimmzug und bestimmen Sie v_1 und v_2 so, dass sich der Schwimmer nach dem kompletten Schwimmzyklus möglichst weit bewegt hat.

M **Aufgabe 23**: *Spontane und angetriebene Permeation*
Eine Membran lässt nicht nur die gelösten Stoffe passieren, sondern auch das Lösungsmittel selbst. In dieser Aufgabe wollen wir den Transport von Wasser durch eine Membran betrachten.

(a) Die *Permeationskonstante* für Wasser lässt sich messen, indem auf der einen Seite der Membran das Wasser durch schweres Wasser HTO vollständig ersetzt wird. Dieses ist chemisch identisch mit H_2O, aber radioaktiv. Der Fluss von schwerem Wasser durch die Membran führt zu einer messbaren Radioaktivität auf der anderen Seite der Membran. Experimentell ergibt sich für den Teilchenstrom radioaktiver Wassermoleküle ein Wert von 3,8 mol/(s m^2). Formulieren Sie für den diffusiven Teilchenstrom j des Wassers eine Relation von der Art des 1. Fick'schen Gesetzes. Bestimmen Sie den darin auftretenden Koeffizienten, die sog. Permeationskonstante $\mathcal{P}_\mathrm{W}$ für Wasser. (Die Konzentration von Wasser ist 55 mol/l.)

(b) Auf beiden Seiten der Membran befinde sich nun normales Wasser, H_2O, wobei wir die Flüssigkeit mit einer Druckdifferenz Δp durch die Membran hindurchpressen. Der daraus resultierende *Volumen*fluss von Wasser durch die Membran wird proportional zu dieser mechanischen Antriebskraft sein: $j_\mathrm{Vol} = \mathcal{L}_\mathrm{W}\Delta p$. Die Konstante $\mathcal{L}_\mathrm{W}$ ist der sog. *Filtrationskoeffizent* der Membran für Wasser.
Vergleichen Sie die Form des Volumenflusses mit der des diffusiven Teilchenstroms. Welche Rolle spielen $\mathcal{P}_\mathrm{W}$ und $\mathcal{L}_\mathrm{W}$? Es besteht eine einfache Beziehung zwischen $\mathcal{L}_\mathrm{W}$ und $\mathcal{P}_\mathrm{W}$. Zeigen Sie anhand einer Dimensionsanalyse, dass $\mathcal{L}_\mathrm{W}$ und $\mathcal{P}_\mathrm{W}$ durch eine Art Einstein-Relation verbunden sind. Welcher Wert ergibt sich damit für $\mathcal{L}_\mathrm{W}$? Wie groß ist der Volumenfluss von Wasser bei einer Druckdifferenz von 1 atm?

S **Aufgabe 24 (6 Punkte):** *Kanonische Verteilung*
Nach der Informationstheorie von Shannon lässt sich die Entropie eines Systems definieren als

$$S = -k\sum_i p_i \ln p_i \,,$$

wobei die Wahrscheinlichkeiten p_i der Mikrozustände des Systems so gewählt sind, dass die Entropie maximal wird. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i der Energiezustände E_i eines Systems bei einer festen Temperatur $\beta = 1/kT$. Zusätzlich zur Normierung $\sum_i p_i \stackrel{!}{=} 1$ muss die Makro-Nebenbedingung

$$\langle E\rangle \equiv \sum_i p_i E_i \stackrel{!}{=} U \quad \text{(innere Energie)}$$

erfüllt sein. Verwenden Sie zur Maximierung der Entropie unter Berücksichtigung beider Nebenbedingungen die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Welche Beziehung ergibt sich damit für die maximierte Entropie?
Einer der Lagrange-Multiplikatoren bleibt dabei noch unbestimmt. Diesem können wir eine physikalische Bedeutung zuordnen, wenn wir die informationstheoretisch definierte Entropie mit der thermodynamischen Entropie $S(U)$ identifizieren. Die Temperatur des Systems ist dann gegeben durch

$$k\beta = \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \,.$$

Was ergibt sich damit letztlich für die Verteilung p_i? Welche Beziehung erhält man für die freie Energie F?