

**3. Übungsblatt: Mathematische Methoden der Physik**  
**Krummlinige Koordinaten**

**Rechnen/Lösungsstrategien im Tutorium: 19. KW vom 7-11.5.2018**

**Lösungsbesprechung im Tutorium: 20. KW vom 14.5-18.5.2018**

**Aufgabe 1 : Kugelkoordinaten**

1. Berechnen Sie analog zur Vorlesung die Tangentialvektoren  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$  sowie die Koordinateneinheitsvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\phi$ .
2. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie  $T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  in Kugelkoordinaten gegeben ist, durch  $T(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2 r^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 r^2)$ .

**Aufgabe 2 : Nablakalkül**

Ein skalares Feld  $\phi(\mathbf{r})$  sei gegeben als

$$\phi(x, y, z) = c \frac{z^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)/d}}{x^2 + y^2 + z^2},$$

wobei c und d Konstanten seien.

1. Schreiben Sie das Feld  $\phi(\mathbf{r})$  in Kugelkoordinaten.
2.  $\phi(\mathbf{r})$  kann beispielsweise ein elektrostatisches Potential sein. Dann bestimmt sich das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  zu  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Berechnen Sie das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  in Kugelkoordinaten. Benutzen Sie dazu:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial r} f\right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f\right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} f\right) \mathbf{e}_\phi.$$

3. Berechnen Sie zu diesem Feld zugehörige die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ , die ein solches Feld erzeugt. Benutzen Sie

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta \sin \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} E_\phi \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

4. Welche physikalischen Einheiten haben die Konstanten c und d?