Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Dirk Kulawiak, Dr. Marten Richter,
Lasse Ermoneit, Manuel Katzer, Robert Salzwedel, Philipp Stammer

5. Übungsblatt: Mathematische Methoden der Physik
Höherdimensionale Integration und Vektorintegration

Rechnen/Lösungsstrategien im Tutorium: 21. KW vom 21-25.5.2018
Lösungsbesprechung im Tutorium: 22. KW vom 28.5-1.6.2018

Aufgabe 1 : *Kurvenintegrale und Oberflächenintegrale*

1. Gegeben sei der Weg W_1 mit $\mathbf{r}_1(\alpha) = (\alpha, \alpha^2, 0)$ und W_2 mit $\mathbf{r}_2(\alpha) = (\alpha, \alpha, 0)$ für $0 < \alpha < 1$ und die Kraft $\mathbf{F} = (-x, y^2 x, 0)$. Berechnen Sie die Arbeit entlang des Weges $A_i = -\int_{W_i} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_i$ für W_1 und W_2. Berechnen Sie ferner $\nabla \times \mathbf{F}$, interpretieren Sie das Ergebnis!

2. Berechnen Sie die Länge des Weges W_3 $L = \int_{W_3} \mathrm{d}r_3$, wobei W_3 durch $\mathbf{r}_3(\alpha) = R(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$ mit $0 < \alpha < \tilde{\alpha}$ gegeben ist.

3. Gegeben sei ein Feld $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}\ \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3}\right)$ mit festen Vektor $\mathbf{d}$ entlang der z-Achse. Berechnen Sie das Integral über eine Kugel K_R mit Radius R: $\iint_{K_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA}$.

4. Berechnen Sie die Manteloberfläche eines Zylinders der Länge L mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Verwenden Sie in allen Teilaufgaben geeignete Koordinaten.

Aufgabe 2 : *Jacobi-Matrix, Funktionaldeterminante und Volumenintegrale*
Es sei eine Koordinatentransformation zwischen kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ und anderen Koordinaten (x'_1, x'_2, x'_3) gegeben:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(x'_1, x'_2, x'_3) \\
x_2 &= x_2(x'_1, x'_2, x'_3) \\
x_3 &= x_3(x'_1, x'_2, x'_3).
\end{aligned}
$$

Die Einträge der sogenannten Jacobi-Matrix F sind definiert als

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

und die Funktionaldeterminante ist gegeben durch $\det F$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Funktionaldeterminante für

1. Zylinderkoordinaten $(x'_1, x'_2, x'_3) = (\rho, \varphi, z)$

2. Kugelkoordinaten $(x'_1, x'_2, x'_3) = (r, \vartheta, \varphi)$

3. Berechnen Sie als explizite Anwendung, das Integral über eine Kugel im Ursprung mit Radius R über die Ladungsdichte $\rho = \rho_0 z e^{-\frac{r}{\gamma}}$ (Ohne vorher Symmetrien anzuwenden!).