Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Dirk Kulawiak, Dr. Marten Richter,
Lasse Ermoneit, Manuel Katzer, Robert Salzwedel, Philipp Stammer

9. Übungsblatt: Mathematische Methoden der Physik
Differentialgleichungen 1. Ordnung

Rechnen/Lösungsstrategien im Tutorium: 25. KW vom 18-22.6.2018
Lösungsbesprechung im Tutorium: 26. KW vom 25-29.6.2018

Aufgabe 1 : *Schwach gedämpfter harmonischer Oszillator*
Für kleine Auslenkungen $x(t)$ wird ein Oszillator beschrieben durch die Differentialgleichung (DGL) 2.Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{1}$$

wobei ω_0 die Eigenfrequenz und $\gamma \geq 0$ der Dämpfungsfaktor ist.

1. Wie Sie aus der Vorlesung wissen: Jede DGL n-ter Ordnung lässt sich in n DGLen 1. Ordnung überführen. Drücken Sie Gleichung (1) durch zwei DGLen 1. Ordnung aus und bringen Sie diese in die Form
$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{q}(t)$$
mit der Matrix $\boldsymbol{A}$. Die allgemeine Lösung lautet
$$\boldsymbol{q}(t) = c_1\boldsymbol{\xi}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^2 e^{\lambda_2 t}\,,$$
wobei $\boldsymbol{\xi}^i$ der i-te Eigenvektor und λ_i der i-te Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist. Die Konstanten c_i werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\boldsymbol{\xi}^i$ $(i = 1, 2)$ und geben Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{q}(t)$ für schwache Dämpfung $(\gamma^2 << \omega_0^2)$ an.

3. Für die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$ für $t_0 = 0$, drücken Sie die allgemeine Lösung für $x(t)$ mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen aus und skizzieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 : *Lasergleichung*
Wir betrachten die Lasergleichung aus der Vorlesung, d.h. die *nichtlineare* Differentialgleichung 1. Ordnung für $u(t)$

$$\dot{u} = -k_1 u - k_2 u^2 \quad (\text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

mit $(k_1, k_2 = const.)$.

1. Verwenden Sie zunächst die Transformation $u = \frac{1}{x}$, um die Gleichung in eine *lineare* Differentialgleichung 1. Ordnung zu überführen.

2. Bestimmen Sie die zeitliche Lösung $u(t)$ aus Gleichung (2).

3. Zeigen und überlegen Sie für welche Werte von k_1 und k_2 $u(t)$ gegen eine Gleichgewichtsgröße $u_\infty \neq 0$ strebt.