

Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge  
Übung: Felix Köster

## 11. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

**Abgabe: Mi. 23.01.2019 12:00, in der Übung**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

### Aufgabe 19 (10 Punkte): Halbleiterlaser mit optischer Rückkopplung

Halbleiterlaser mit optischer Rückkopplung, beispielsweise durch einen halbdurchlässigen Spiegel vor der Laserkavität, lassen sich durch die sogenannten Lang-Kobayashi-Gleichungen beschreiben:

$$\dot{E} = (1 + i\alpha)NE + KE(t - \tau) \quad (1a)$$

$$T\dot{N} = J - N - (N + 1)|E|^2 \quad (1b)$$

Dabei ist  $E$  die komplexe elektrische Feldamplitude in der Laserkavität und  $N$  die normierte Ladungsträgerinversion.  $T$  bezeichnet die Zeitskalentrennung zwischen Licht und Ladungsträgern,  $J$  ist die normierte Pumpstärke. Durch die endliche Laufzeit wird das Licht mit einer Zeitverzögerung  $\tau$  in die Laserkavität zurückgekoppelt, dabei bezeichnet  $K$  die Rückkopplungsstärke. Der Parameter  $\alpha$  (Amplituden-Phasen-Kopplung) führt zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte.

1. Bestimmen Sie im Fall ohne Rückkopplung ( $K = 0$ ) die Fixpunkte des Systems und deren Stabilität.
2. Durch die Rückkopplung werden für zunehmendes  $K$  neue Lösungen geboren. Wir interessieren uns für die sogenannten externen Kavitätsmoden (ECMs), gegeben durch

$$E = Ae^{i\Delta\omega t} \quad N = N^* = \text{const.} \quad (2)$$

mit  $A, \Delta\omega \in \mathbb{R}, A = \text{const.}$ . Die ECMs besitzen eine um  $\Delta\omega$  verschobene Laserfrequenz. Leiten Sie mit obigem Ansatz die folgende Bestimmungsgleichung für die ECMs her:

$$\Delta\omega = -K\sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\Delta\omega\tau + \arctan \alpha) \quad (3)$$

*Hinweis:*  $a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \arctan \frac{b}{a})$ .

3. Wir wählen nun  $\alpha = 0, \tau = 15$ .

Gleichung (3) ist eine transzendente, analytisch nicht lösbare Gleichung. Suchen Sie für verschiedene  $K \in [0, 1]$  graphisch die Werte von  $\delta\omega$ , die Gl. (3) lösen. Skizzieren Sie dann die Lösungen zu Gl. (3) in einem  $(K, \delta\omega)$ -Diagramm.

*Bonus:* Sie können alternativ auch ein Programm schreiben, das Gl. (3) numerisch löst. Stellen Sie dann sicher, dass Sie alle Lösungen finden!

**Bitte Rückseite beachten! →**

11. Übung TPVI: Nichtlineare Laserdynamik, SS 18

**Aufgabe 20 (10 Punkte): Gekoppelte Hopf-Normalformen**

Betrachten Sie im Folgenden subkritische Hopf-Normalformen (ohne Amplituden-Phasen-Kopplung:  $\gamma = 0$ , vgl. VL):

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + |z|^2)z \quad (4)$$

mit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\omega > 0$ .

1. Bestimmen Sie Fixpunkte und periodische Orbits des Systems in Abhängigkeit von  $\lambda$  sowie deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm.
2. Wir betrachten zwei diffusiv gekoppelte Hopf-Normalformen mit der Kopplungsstärke  $a$ :

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + |z_1|^2)z_1 + a(z_2 - z_1) \quad (5a)$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + |z_2|^2)z_2 + a(z_1 - z_2) \quad (5b)$$

Drücken Sie Gleichung (5) in Abhängigkeit von den neuen Koordinaten

$$z_+ := \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad z_- := \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \quad (6)$$

aus.

3. Wir interessieren uns nun für die synchronen ( $z_- = 0$ ) und antisynchronen Lösungsmengen ( $z_+ = 0$ ) des Systems. Zeigen Sie, dass in diesen beiden Fällen die Differentialgleichungen für  $z_{\pm}$  jeweils wieder die Form einer subkritischen Hopf-Normalform annehmen. Bei welchen Werten von  $\lambda$  bifurkieren die zwei Lösungsmengen? Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm des Gesamtsystems bezüglich  $\lambda$ .

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im <b>EW 202</b>.</li><li>• Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im <b>EW 203</b>.</li></ul>
Übung:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731.</li></ul>
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <a href="https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/">https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/</a></li></ul>
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).</li><li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.</li></ul>
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, <a href="mailto:kathy.luedge@tu-berlin.de">kathy.luedge@tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00.</li><li>• Felix Köster, EW 629, 314-24254, <a href="mailto:f.koester@tu-berlin.de">f.koester@tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30</li></ul>