Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge
Übung: Felix Köster

2. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

Abgabe: Mi. 07.11.2018 12:00, in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Floquet-Theorie*

Betrachten Sie das folgende System in Polarkoordinaten:

$$\dot{r} = r(1-r)(b + r\cos\phi) \tag{1a}$$
$$\dot{\phi r} = \omega r \tag{1b}$$

Es seien $r, \phi \in \mathbb{R}$, und $\omega > 0$ sowie $b \in \mathbb{R}$ seien freie Parameter.

1. Berechnen Sie die Fixpunkte des Systems und deren Stabilität.
2. Zeigen Sie, dass das System einen periodischen Orbit besitzt. Berechnen Sie die dazugehörige Lösung $r(t), \phi(t)$ sowie die Periode T analytisch.
3. Berechnen Sie die Stabilität des periodischen Orbits in Abhängigkeit vom Parameter b. Gehen Sie wie folgt vor:
   - Betrachten Sie kleine Abweichungen $\underline{\delta x} = (\delta r, \delta\phi)^T$ von der periodischen Lösung und stellen Sie deren dynamische Gleichungen auf, indem Sie das System um die periodische Lösung linearisieren.
   - Lösen Sie die linearisierte Gleichung und berechnen Sie $\underline{\delta x}(t)$.
   - Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator einer Periode $\underline{\underline{U}}(T)$, dieser ist wie folgt definiert:
   $$\underline{\delta x}(t+T) = \underline{\underline{U}}(T)\underline{\delta x}(t)$$
   - Die Eigenwerte von $\underline{\underline{U}}(T)$ (dies sind die Floquet-Multiplikatoren μ_j) bestimmen die Stabilität des periodischen Orbits. Berechnen Sie diese sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *SNIPER*

Die folgenden Gleichungen beschreiben ein einfaches Modell einer SNIPER-Bifurkation (**s**addle-**n**ode **i**nfinite **per**iod). In Polarkoordinaten sind die dynamischen Gleichungen gegeben durch

$$\dot{r} = r(1-r^2),$$
$$\dot{\phi} = b - r\cos\phi.$$

Im folgenden soll nur die Dynamik von ϕ auf dem Kreis mit $r = 1$ untersucht werden (das geht, weil der Kreis eine invariante Mannigfaltigkeit des Systems ist).

2. Übung TPVI: Nichtlineare Laserdynamik, SS 18

1. Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität).

2. Finden Sie die Lösungen $\phi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b < 1$ und $b > 1$. Benutzen Sie hierfür

$$\int \frac{d\phi}{b-\cos\phi} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \arctan\left[\frac{(b+1)\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{b^2-1}}\right] \qquad \text{für} \quad b > 1,$$

$$\int \frac{d\phi}{b-\cos\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \log\left[\frac{(1+b)\tan\frac{\phi}{2} - \sqrt{1-b^2}}{(1+b)\tan\frac{\phi}{2} + \sqrt{1-b^2}}\right] \qquad \text{für} \quad b < 1.$$

3. Betrachten Sie die beiden Fälle $b = 1.5$ und $b = 0.5$. Wählen Sie in jedem der beiden Fälle mehrere Anfangsbedingungen $\phi(t=0)$, die gleichmäßig auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ verteilt sind. Plotten Sie die dazugehörigen Zeitserien von $x(t) = \cos\phi(t)$.

`Vorlesung:`	• Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im **EW 202**. • Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00. • Felix Köster, EW 629, 314-24254, `f.koester@tu-berlin.de`, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30