

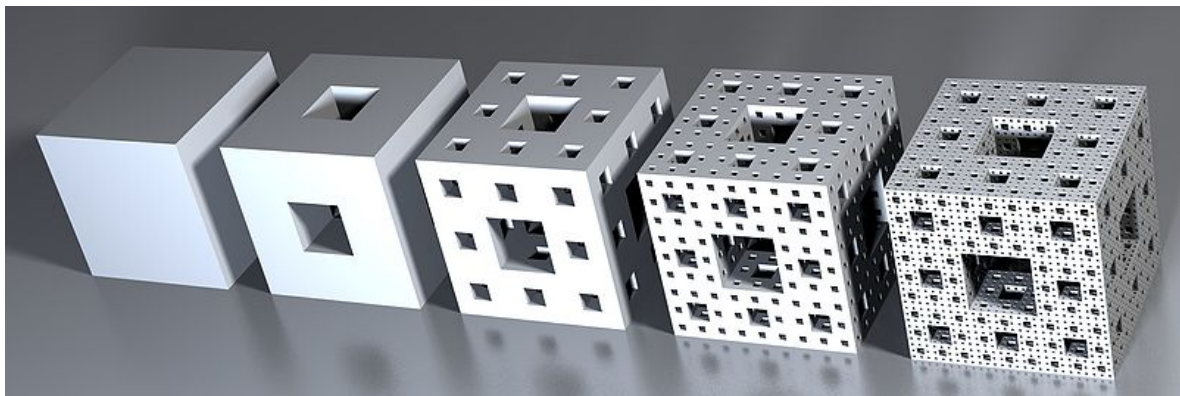
Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge  
Übung: Felix Köster

### 3. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

**Abgabe: Mi. 14.11.2018 12:00, in der Übung**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

**Aufgabe 5 (8 Punkte): Menger-Schwamm und fraktale Dimension**



Der Menger-Schwamm (benannt nach Karl Menger) entsteht, wenn man einen Würfel in  $27 = 3 \times 3 \times 3$  gleich grosse Würfel zerlegt, 7 dieser Würfel entfernt (siehe Abbildung) und dies rekursiv mit den übrig gebliebenen Teilwürfeln wiederholt.

1. Berechnen Sie die Oberfläche  $F_n$  und das Volumen  $V_n$  in Abhängigkeit der Iterationstiefe  $n$  ( $n = 0$  entspricht dem vollen Würfel). Welche Werte ergeben sich im Limes  $n \rightarrow \infty$ .
2. Berechnen Sie die Hausdorffdimension des Menger-Schwamms.

**Aufgabe 6 (12 Punkte): logistische Abbildung**

In dieser Aufgabe soll die Entsehung von Chaos in der logistischen Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n) := r x_n(1 - x_n), \quad (r \in [0, 4])$$

genauer untersucht werden. Berechnen Sie dazu numerisch ein Bifurkationsdiagramm und ein Diagramm des Lyapunov-Exponenten in Abhängigkeit  $r$ . Untersuchen Sie hiermit:

- Welchen Wert hat der Lyapunov-Exponent, wenn eine Periodenverdopplung auftritt? Was passiert im Bifurkationsdiagramm, wenn der Lyapunov-Exponent positiv wird?
- Es seien  $R_n$  die  $r$  Werte bei den Periodenverdopplungen. Finden Sie (aus dem Bifurkationsdiagramm) die ersten drei oder vier Verhältnisse

$$\delta_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}.$$

Stimmen diese mit der universellen Feigenbaumkonstante  $\delta = 4.669\dots$  überein? (Vergrößern Sie nötigenfalls die Genauigkeit in der Nähe der Periodenverdopplungen.)

**Bitte Rückseite beachten! →**

### 3. Übung TPVI: Nichtlineare Laserdynamik, SS 18

#### *Hinweise für die Numerik:*

Verwenden Sie eine Sequenz von  $r$  Werten aus  $[0, 4]$  mit geeigneter Auflösung. Für jeden  $r$  Wert iterieren Sie die Abbildung numerisch mit einer beliebigen Anfangsbedingung  $x_0 \in (0, 1)$  etwa 400 mal (bis Transienten abgeklungen sind). Danach verwenden Sie etwa 300 weitere Iterationen für das Bifurkationsdiagramm und ca. 2.000 Iterationen für die Lyapunov-Exponenten.

- *Berechnung der Lyapunov-Exponenten:* Bilden Sie (nach der Transienten) den Mittelwert der lokalen Lyapunov-Exponenten  $\ln |f'(x_n)|$  über die ca. 2.000 berechneten  $x_n$ . Plotten Sie diesen Lyapunov-Exponent im Wertebereich  $[-1, 1]$ .
- *Bifurkationsdiagramm:* Plotten Sie (nach der Transienten) die 300 Werte von  $x_n$  über dem entsprechenden  $r$  Wert.

(Verwenden Sie als Bildformat z.B. png mit geeigneter Auflösung und keine Vektorgrafik, da sonst die Dateien durch die vielen Daten zu gross werden).

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im <b>EW 202</b>.</li><li>• Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im <b>EW 203</b>.</li></ul>
Übung:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731.</li></ul>
Webseiten:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <a href="https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/">https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/</a></li></ul>
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen).</li><li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.</li></ul>
Kontakte:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, <a href="mailto:kathy.luedge@tu-berlin.de">kathy.luedge@tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00.</li><li>• Felix Köster, EW 629, 314-24254, <a href="mailto:f.koester@tu-berlin.de">f.koester@tu-berlin.de</a>, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30</li></ul>